別冊・数理科学

2009年10月

量子重力理論

広がる多彩な最前線

サイエンス社

別冊・数理科学 目次

量子重力理論

広がる多彩な最前線

I. 序論

II. 超弦理論からの展開

III. 非可換幾何学からの展開

IV. ループ量子重力理論への展開

V. ブレーンワールドからの展開

VI. 量子宇宙論からの展開

VII. ダークエネルギーからの展開

本別冊は,「数理科学」(月刊)に掲載された論文を再編集し,これに書き下ろし数本を加え,構成されています.再録する論文については,増補・訂正を加えたものがありますことをおことわりいたします.

数理科学編集部

初出一覧

〈=は原題名〉	( )は発行年月号.
量子重力理論 **検証に向けた新たな展開**	小玉 英雄('05.04)
量子重力理論の起源	米谷 民明(新 規)
素粒子論の現状と展望 **量子重力の立場から**	川合 光(新 規)
超弦理論におけるランドスケープ問題	江口徹・立川裕二('05.04)
AdS/CFT 対応とホログラフィー	福間 将文('05.04)
量子重力と共形場理論	高柳 匡(新 規)
素粒子の統一理論としての超弦理論	大栗 博司(新 規)
超弦理論の数値シミュレーション	西村 淳(新 規)
量子重力理論	笹倉 直樹('06.07)
量子重力と Wilson Loop	北澤 良久('05.04)
ループ量子宇宙論	辻川 信二('05.04)
面積量子化とブラックホール	玉置 孝至('05.04)
高エネルギー γ 線クライシス 〈=トピック:高エネルギー γ 線クライシス〉	菅本晶夫・渡部勇('05.04)
TeV 重力理論	川崎 雅裕('05.04)
ブレーン宇宙とインフレーション理論	姫本 宣朗('04.01)
宇宙項問題と D ブレーンインフレーション	早田次郎・菅野優美('05.04)
ブレーンワールドにおける宇宙論的摂動	小山 和哉('04.01)
ブレーン理論と振動宇宙論 〈=トピック:ブレーン理論と振動宇宙論〉	山口 昌英('03.02)
宇宙の創生	佐藤 勝彦('00.04)
量子宇宙論の盛衰	小玉 英雄('03.02)
インフレーション宇宙論	横山 順一('03.02)
宇宙論と量子カオス	井上 開輝('03.03)
宇宙論の新展開	佐藤 勝彦('03.02)
宇宙の真空 **変動する真空**	佐藤 文隆('02.09)
ダークエネルギー問題	千葉 剛('03.02)
宇宙の暗黒成分と量子重力	向山 信治(新 規)

I. 序論

I. 序論

量子重力理論

検証に向けた新たな展開

小 玉 英 雄

超弦理論を中心として，20 世紀末の 20 年間における量子重力理論の発展は目覚ましいものであったが，その成果の多くは純理論的な色彩の強いもので，実験や観測と直接結び付く検証可能な予言を与えるには至らなかった．しかし，ここ数年間における研究，特に量子重力の非摂動論的効果に関する研究は，宇宙論，ブラックホール物理，加速器実験，宇宙線反応など様々な領域において検証可能な予言を与えつつあり，状況は大きく変化している．本別冊では，これら量子重力理論研究の多様な最前線を紹介するが，この総論では，個々のトピックの解説に先立ち，理論的にも現象的にも多岐にわたる量子重力研究についての全体像を持ってもらうために，研究の背景と相互の関係について概説する．

1. 量子重力理論の困難

一般相対論は，天体現象から宇宙全体にわたる巨視的なスケールでの重力現象を記述する基礎理論として不動の地位を得ている．しかし，重力源となる物質の量子性が重要となるミクロのスケールでは事情が異なる．Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

において（Λ は宇宙定数，$\kappa^2 = 8\pi G$，光速 $c = 1$），ミクロのスケールでは右辺のエネルギー・運動量テンソルは量子論的ゆらぎを持ち，これは左辺を通して時空計量の量子ゆらぎを生み出す．したがって，ミクロの世界での重力相互作用を正しく記述するには，量子化された重力理論，すなわち量子重力理論が必要となる．

重力場が弱く，計量が Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ からわずかにずれているとき，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ とおいて，$h_{\mu\nu}$ に関して 1 次近似すると，Einstein 方程式は重力波を表す波動方程式を与える．この線形化された理論は，電磁場の量子化と同じ方法で容易に量子化することができ，重力波は重力子の集まりとして記述される．したがって，例えば物質場が存在しないとき，Einstein 方程式に対応する Einstein–Hilbert 作用積分

$$S_{\rm EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) \qquad (1)$$

を $h_{\mu\nu}$ について展開し，3 次以上の項をこの重力子の相互作用と見なすことにより，通常の場の理論の方法を用いて重力の摂動論的量子論を構成できることが期待される．ただし，よく知られているように相互作用する場の量子論では粒子の散乱振幅は一般に発散する積分で与えられる．量子電気力学やゲージ場の理論では，この発散は繰り込み可能で，散乱振幅を直接観測可能なパラメータで表すと有限な表式が得られる．また，これらのパラメータの数は，出発点で用いた作用積分に含まれる質量や相互作用定数の数と一致する．これに対して，今述べた方法で Einstein 理論を量子化す

ると，繰り込み不可能な発散が現れる．この発散は，理論を拡張して，元の作用積分に $R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ のような高次の項を無限個付け加えることにより繰り込むことができるが，散乱振幅を有限な表式で表すには無限個のパラメータが必要となる．したがって，有限回の観測で理論のパラメータを確定することができず，理論は予言可能性を失ってしまう．これは重力の量子化における最大の困難であり，それをいかに克服するかが量子重力理論を作る上で最も重要なポイントとなる．

もっとも，量子効果で現れるこれらの補正項はマクロスケールあるいは低エネルギーの現象では無視できると期待される．実際，曲率を簡単に $\mathcal{R}$，対応する時間・空間スケールを L と表すと，$\mathcal{R} \sim 1/L^2$ なので，$\mathcal{R}^n$ に比例する項は作用積分の中で，

$$\kappa^{2n-4}\mathcal{R}^n \sim (L_{\rm pl}/L)^{2(n-1)}\kappa^{-2}R$$

の形で現れる．ここで，$L_{\rm pl}$ は Planck 長

$$L_{\rm pl} = \left(\hbar G/c^3\right)^{1/2} \simeq 10^{-32}{\rm cm}$$

である．したがって，$\mathcal{R}$ の 2 次以上の項は巨視的な現象では無視できる．また，エネルギースケールに換算すると，$L_{\rm pl}$ は Planck エネルギー

$$E_{\rm pl} = \hbar c/L_{\rm pl} \simeq 10^{19}\,{\rm GeV}$$

に対応するので，エネルギーが $E \ll E_{\rm pl}$ となる粒子の相互作用では重力の量子効果は無視できると期待される．このことは，見方を変えると，$L \sim L_{\rm pl}$ や $E \sim E_{\rm pl}$ という極端に小さなスケールの時空構造や超高エネルギー粒子の反応を観測しない限り，重力の量子効果を検出できないことを意味する．これは，量子重力理論の検証が非常に困難であることを示唆している．

2. 正準量子重力

現在，量子重力理論を作る試みとして，大きく異なる 2 つのアプローチが存在する（量子重力理論のより詳しい歴史的背景については米谷氏の解説参照）．その一つは，Einstein 理論の正準量子化を出発点として，非摂動論的な方法で重力の量子論を作る試みである．その基本的なアイデアは，重力の量子効果が重要となるスケールでは時空構造のゆらぎが大きいため摂動論による扱いは不可能で，この大きなゆらぎあるいは時空構造の量子性を正しく考慮すれば，摂動論で現れた発散は実際には現れないだろうというものである．

このアプローチでは，まず，時空を時間一定面に相当する空間的超曲面の系列に分解する（3＋1 分解）．時間 t に対応する空間面 Σ_t の計量を $q(t) = \{q_{ij}(t, \boldsymbol{x})\}$ として，計量は

$$ds^2 = -N^2dt^2 + q_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)$$

と表される．このとき，簡単のため真空の場合を考えると，Einstein–Hilbert 作用積分は

$$S_{\rm EH} = \int d^4x \left[\dot{q}_{ij}p^{ij} - N^i\mathcal{H}_i(q,p) - N\mathcal{H}_\perp(q,p)\right] \qquad (2)$$

と書き換えられる．ここで，p^{ij} は q_{ij} の Σ_t に垂直な方向に沿う時間変化率（外部曲率 K_{ij}）に比例した量である．また，n^μ を Σ_t の単位法ベクトル，$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ として，

$$\mathcal{H}_i = G_{\mu i}n^\mu, \quad \mathcal{H}_\perp = G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$$

である．したがって，Einstein 方程式は $q(t)$ およびそれに正準共役な量 $p(t) = \left\{p^{ij}(t, \boldsymbol{x})\right\}$ に対する正準方程式として表される．ただし，座標自由度に対応する N と N^i は任意なので，その変分より拘束条件 $\mathcal{H}_i = 0$ および $\mathcal{H}_\perp = 0$ が現れる．

通常，この系の量子論では，Dirac に従って，これらの拘束条件は状態ベクトル Φ に対する量子拘束条件として表される：

ベクトル型拘束条件：$\mathcal{H}_i\Phi = 0,$ (3a)

スカラ型拘束条件：$\mathcal{H}_\perp\Phi = 0.$ (3b)

古典論では，$\int d^3xL^i\mathcal{H}_i$ はベクトル場 L^i に対応する Σ_t の無限小変換を生成するので，対応する量子拘束条件は Φ が空間の微分同相変換で不変であることを表す．また，系の Hamiltonian H は $\mathcal{H}_\perp$ と $\mathcal{H}_i$ の線形結合となるので，量子拘束条件

の下で，Schrödinger 方程式 $i\partial_t \Phi = H\Phi$ は自明となり，Φ は t に依存しない．したがって，量子拘束条件のみが残ることになる．Φ を q 空間上の汎関数として表示した場合の $\mathcal{H}_\perp \Phi = 0$ は，しばしば **Wheeler–De Witt 方程式**と呼ばれる．

1980 年代には，以上の定式化を宇宙全体に適用することにより量子宇宙論の研究が盛んに行われ，「無からの宇宙創生」（A. Vilenkin）や宇宙の無境界波動関数（J. Hartle と S.W. Hawking）など様々な興味深いアイデアが提案された[1)]．しかし，これらの議論は検証可能な明確な予言を与えるには至らなかった．それにはいくつかの理由があるが，量子拘束条件を一般的に解くことができないため，q 空間を有限自由度に簡約したミニスーパースペースやその摂動に議論が限定されていたこともその一つである．

3. ループ量子重力

このような状況で，正準量子化から出発して真に非摂動的な量子重力の定式化を与えようとしたのが，現在ループ量子重力理論と呼ばれているアプローチである[2)]．その原点となったのは，重力の正準理論に対する **Ashtekar 形式**である．

この理論形式では，計量ではなく対応する共変微分の接続係数を基本的な変数と見なす．まず，$e_I = (e_I^i)$ $(i = 1,2,3)$ を計量 q_{ij} に対する Σ_t 上の正規直交基底，$\theta^I = \theta_i^I dx^i$ をその双対基底 $(\theta^I(e_J) = \delta_J^I)$ とする．このとき，$q_{ij} = \theta_i^I \theta_{Ij}$（内部添え字 $I, J, \cdots$ は δ_{IJ} で上げ下げ）より，

$$\tilde{e}_I^i = \frac{1}{\kappa^2}\sqrt{q}e_I^i,$$

$$P_i^I = -\frac{2\kappa^2}{\sqrt{q}}\left(\theta_j^I p^{ij} - p_j^j \theta_i^I\right) \equiv K_{ij}e^{Ij}$$

とおくと，正準形の作用積分 (2) は

$$S = \int d^4x \left(-\tilde{e}_I^i \dot{P}_i^I - M^I G_I - N^i \mathcal{H}_i - N\mathcal{H}_\perp\right)$$

と書き換えられる．ただし，M^I は任意関数，G_I は $G_I = \epsilon_{IJK}\tilde{e}_i^J P^{Ki}$ である．S を M^I で変分すると，拘束条件 $G_I = 0$ が得られる．この拘束条件は $K_{ij} = \theta_{Ii}P_j^I$ が対称テンソルであることを要求する条件となっている．

ここで，$\nabla_i e_I = e_J \omega^J{}_{Ii}$ により定義される e_I に関する接続係数 ω_{IJi} を用いて $\Gamma_i^I = \frac{1}{2}\epsilon^{IJK}\omega_{JKi}$ とおくと，

$$\dot{\tilde{e}}_I^i \Gamma_i^I = \epsilon_{IJK}\left[\partial_t\left(\theta_{Ij}\partial_k e^{Jj}E^{Kk}\right) + \partial_k\left(\dot{\theta}_{Ij}e^{Jj}E^{Kk}\right)\right]$$

が成り立つので，$\dot{\tilde{e}}_I^i P_i^I$ で $\tilde{e}_I^i$ と P_i^I を

$$\tilde{e}_i^i \rightarrow E_I^i := \gamma^{-1}\tilde{e}_I^i, \tag{4a}$$

$$-P_i^I \rightarrow A_i^I := \Gamma_i^I - \gamma P_i^I \tag{4b}$$

と置き換えても変分方程式は変化しない．したがって，S_{EH} は結局，

$$S_{\mathrm{H}} = \int d^4x \left(E_I^i \dot{A}_i^I - M^I G_I - N^i \mathcal{H}_i - N\mathcal{H}_\perp\right)$$

と同等であることが分かる．

ここで，γ は定数で，**Immirzi パラメータ**と呼ばれる．もともとの Ashtekar 理論では $\gamma = \pm i$ が採用されていたが，この場合，拘束条件が微分多項式型の単純な表式で与えられるという利点がある一方で，変数が複素数となるため量子化の際に様々な困難が生じた．このため，現在では，γ を実数の理論パラメータとして扱うのが主流である．

この形式で重要な点は，正規直交基底 e_I の局所的な回転

$$\bar{e}^I = O^I{}_J e^J; \quad O = (O^I{}_J) \in SO(3)$$

に対して，$A = A_i dx^i; A_i = (\epsilon_{IKJ}A_i^K)$ が $SO(3)$ ゲージ場と同じ変換則

$$\bar{A} = OAO^{-1} + dOO^{-1} \tag{5}$$

に従って変換し，この変換に対して S_{H} が（M^I の適当な変換により）不変となっていることである．すなわち，重力理論を特殊なゲージ場の理論と見なすことができる．この描像では，E_I^i は電磁場の電場にあたる．また，G_I は

$$G_I = D_i E_I^i := \partial_i E_I^i + \epsilon_{IJK}A_i^J E^{Ii}$$

と書き換えることができるので，拘束条件 $G_I = 0$ は Gauss の法則に対応する．また，ゲージ理論と同様に，G_I から生成される正準変換は $SO(3)$

ゲージ変換と一致する．

この理論を Dirac 量子化すると，正準量子重力理論の場合の拘束条件 (3a) および (3b) に加えて，

$$\text{ゲージ拘束条件：} G_I \Phi = 0 \tag{6}$$

が現れる．これは，上で述べた G_I の正準理論における役割から，Φ が局所 $SO(3)$ ゲージ変換で不変であることを要求するものとなる．ループ量子重力理論の最大の特徴は，この拘束条件を解くために，**ホロノミー変数**を利用する点にある．まず，正準変数の対 (E^i_I, A^I_i) において，ゲージ場 A を配位変数，$E=(E^i_I)$ をその共役運動量と見なすと，状態ベクトルは A 空間上の波動関数 $\Phi(A)$ として表される．ここで，接続 A により定義される曲線 $\alpha=(\alpha^i(t))$ $(0 \le t \le 1)$ に沿った平行移動

$$U_\alpha[A] = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n-1}\left[1+A_i\left(\alpha(t_j)\right)\dot{\alpha}^i(t_j)\tfrac{1}{n}\right]$$
$$\equiv P_\alpha \exp\int A \quad \in SO(3)$$

$(t_j = j/n)$ は，ゲージ変換 (5) に対して

$$U_\alpha[\bar{A}] = O\left(\alpha(1)\right)U_\alpha[A]O\left(\alpha(0)\right)^{-1}$$

と変換するので，α が閉曲線のとき，ホロノミー変数 $T_\alpha[A]=\mathrm{Tr}(U_\alpha[A])$ はゲージ不変となり，ゲージ拘束条件を満足する．さらに，すべてのループ α に対して $T_\alpha[A]$ の値が指定されると，A はゲージ自由度を除いて一意的に定まることが示される[3]．したがって，ゲージ拘束条件の任意の解は，ホロノミー変数の（一般に無限個の）線形結合で表される．特に，ゲージ不変な状態ベクトルの空間に適当な内積が定義されているとき，

$$\Psi[\alpha] = \langle T_\alpha | \Phi\rangle$$

により定義されるループ空間上の汎関数によりゲージ拘束条件の解を表すことができる（**ループ表現**）．また，ベクトル型拘束条件は，$\Psi[\alpha]$ がループのなめらかな連続変形（ただし，ループが自分自身と交わる変形は禁止する）により不変となる要請と同等となる．これがループ量子重力という言葉の起源である．

ただし，ホロノミー変数は互いに線形独立でなく，ループ表現には曖昧さがある．この問題は，ホロノミー変数の特別の組み合わせであるスピンネットワーク変数を用いることにより解決され，対応するゲージ不変な状態ベクトルの基底は**スピンネットワーク基底**と呼ばれる[2,4]．このスピンネットワーク基底は，現在，ループ量子重力理論において最も重要な概念となっている．例えば，この基底を用いることにより，面積や体積を表す作用素が構成され，それらが離散的なスペクトルを持つことが示されている．この面積や体積の離散性は，量子重力の非摂動論的効果が産み出す時空の量子性を表すものと考えられ，注目されている．

ループ量子重力理論はまだ発展途上の理論であり，古典論や摂動論的量子論との対応，スカラ拘束条件やダイナミクスの取り扱い，状態解釈など様々な解決すべき問題が存在するが，数理的に豊かな構造を持つ非常に興味深い理論である．また，不完全ながらも，実験や観測にかかる情報を取り出し，理論を検証しようとする試みも始まっている．ブラックホール時空におけるスピンネットワーク状態の境界値問題と面積作用素の関係に注目して，ループ量子重力理論の枠内でブラックホールエントロピーの表式を導き，理論パラメータである Immirzi パラメータを決める試み，ブラックホール基準振動の減衰率と面積作用素の固有値の最小値を関連付ける議論などがその重要な例である（玉置氏の解説参照）．また，ループ量子重力理論の定式化を空間的に一様等方な宇宙モデルに適用して，ミニスーパースペースモデルに基づく量子宇宙論を作る試みが Bojowald を中心とする人々により進められている．この**ループ量子宇宙論**は，計量に基づく正準量子論と異なり，時間が離散化され，宇宙の初期特異点が実質的に回避されるという興味深い特徴を持つ（辻川氏の解説参照）．さらに，これらの研究と比較すると厳密さを欠くが，観測される超高エネルギー宇宙線の数が理論の予想を超えているという観測を，時空の量子性の効果として説明する試みもある（菅本・渡部氏の解説参照）．

4. 弦理論

量子重力理論に対する正準理論と並ぶもう一つのアプローチは弦理論である．弦理論は，張力が長さによらず一定値 $1/(2\pi\alpha')$ を保つひもの量子論である[5]．ひもはその振動状態により様々なエネルギーや内部角運動量に対応する量子状態を取る．このことに対応して，弦理論は，様々な質量，スピンを持つ素粒子を1つのひもの内部状態の違いとしてまとめて記述する理論となっている．

ひもはちぎれて2つ以上に分裂したり，逆に2つ以上のひもが1つに合体することもできる．これは，粒子の描像で見ると，2つ以上の粒子が相互作用により反応や散乱を起こすことに対応する．この状況を時空全体で眺めると，ひもの軌跡（世界面）は2次元面となり，自由粒子に相当するひもは無限に長いリボンや円筒で，またそれらの相互作用は分岐する面で表される（図1）．ここで，世界面がリボンになるひもは2つの端点を持つ開いたひも（開弦）に，また，円筒となるひもはループ状のひも（閉弦）に対応する．

相互作用を表す分岐した面は，ひもの長さをゼロとした極限を取ると，ちょうど場の量子論で素粒子の散乱振幅を計算する際に用いる Feynman 図式と同じ図式が得られる．弦理論ではこのアナロジーを用いて，分岐する世界面のリボンや円筒にはひもの伝搬関数を，分岐箇所には結合定数 g を付与することにより，ひもあるいはその様々な内部状態に対応する素粒子の散乱振幅を計算する．

このように構成された弦理論では，ひもの内部状態に開弦ではゲージ粒子（スピン1，質量ゼロ）が，閉弦では重力子（スピン2，質量ゼロ）が自然に含まれる．弦理論の最大の魅力は，これらの粒子の相互作用が，低エネルギー極限で通常のゲージ相互作用や（Einstein 理論に従う）重力相互作用と一致し，しかも対応する散乱振幅が発散を含まない有限量となることである．Einstein 理論の摂動論的量子化における最大の問題であった発散の問題が全くなくなるわけである．

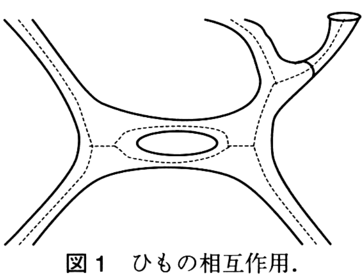


図1　ひもの相互作用．

ただし，犠牲も伴う．それは理論が矛盾なく構成できるのは，ひもの運動する時空が（Minkowski 時空の場合）26次元という高い次元を持つ場合に限られることである．また，これまでに説明した弦理論（ボーズ的弦理論）では，半整数スピンを持つ粒子が得られず，しかも，ひもの最低エネルギー状態は質量の2乗が負のタキオンとなってしまう．これらのうちフェルミ粒子の問題は，ひもの上に2次元的なスピノール場をのせることにより回避される．さらに，この理論が2次元の理論として超対称性を持つように作ると，タキオンを含む一部の状態を相互作用と矛盾しないように捨て去ることができ（GSO 射影），粒子スペクトルと散乱行列が超対称性を持つ理論ができる．このような弦理論は**超弦理論**と呼ばれる．

ただし，超弦理論は，10次元時空でのみ発散や量子異常を含まない整合的な理論となる．これまでに，10次元の整合的な超弦理論として，I–$SO(32)$ 型，IIA 型，IIB 型，ヘテロ–$SO(32)$ 型（以下，HO 型），ヘテロ–$E_8\times E_8$ 型（以下，HE 型）の5つが知られている[5]．これらのうち，I 型は向きを持たない開弦と閉弦の理論で，開弦の両端に非可換電荷を付与することにより非可換ゲージ自由度を取り入れる理論である．理論の整合性より，このゲージ群は $SO(32)$ に限られる．次の II 型の理論は閉弦のみの理論で，低エネルギーでは本質的に重力相互作用のみを含む．閉弦では，ひもを右回りに進む波と左回りに進む波は相互作用せず，全体の量子状態はそれぞれの状態の積となる．特に，超弦理論ではそれぞれから質量ゼロ，スピン 1/2 のモード（R–モード）が現れ，GSO 射影の際にこれらのモードに対応するフェルミ粒子のカイラリティを左巻

きないし右巻きのいずれかに限定する．この結果，右回りと左回りで異なるカイラリティを残したモデルがIIA型，同じカイラリティを残したモデルがIIB型である．残りのヘテロ型理論は，同じく閉弦理論であるが，右回り状態を10次元の超弦理論により，左回り状態を26次元のボーズ的弦理論により構成した混合型理論で，2つの理論の違いは含まれる非可換ゲージ理論の違いである．この理論では，26次元時空として10次元Minkowski時空と16次元トーラスを仮定する．このとき，16次元部分に対応する振動モードから$SO(32)/\mathbb{Z}_2$ないし$E_8\times E_8$という群の随伴表現に対応する質量ゼロ，スピンゼロの状態が得られる．これと質量ゼロ，スピン1の右回り状態の積がこれらの群をゲージ群とするゲージ粒子として振る舞う．これら5つの理論に含まれる質量ゼロ粒子の相互作用は，低エネルギーの極限で，対応する5種類の10次元超重力理論，すなわち一般共変性と超対称性を併せ持つ10次元重力理論により記述される．ただし，超重力理論はMinkowski時空以外の解を持ち，超弦理論を曲がった時空（や自明でない背景場）上に拡張した非摂動的理論と対応している．

5. 双対性，D ブレーン，M 理論

このように，数が少ないとはいえ，複数個の整合的な量子重力理論が存在することは，当初，究極の理論は一意的であろうと予想していた研究者をとまどわせた．しかし，最近の研究で，状況は大きく変化した．その発端は，双対性の発見である．例えば，10次元Minkowski時空において，一つの空間方向を長さLを単位として周期的に同一視する．このとき時空は9次元Minkowski時空と円の積空間$E^{8,1}\times S^1$となり，その上の超弦理論のスペクトルは一部変更を受ける（S^1コンパクト化）．この変更をIIA型とIIB型に施してみると，両者のスペクトルは$L\to\alpha'/L$という変換（T変換）で一致することが分かる．実は，相互作用まで含めて，2つの理論は完全に対応する．すなわち，S^1コンパクト化されたIIA型とIIB型の理論は，理論パラメーターの表示の違いを除いて，同じ理論II/S^1となる訳である．(IIA型を基準に考えると,）$L\to\infty$の極限でこの理論は元のIIA型と一致し，$L\to 0$で元のIIB型と一致する．このように，2つの理論が1つの理論の異なるパラメータ極限として得られるとき，それらは互いに双対であると言われる．特に，今説明したものはT **双対**と呼ばれる．ヘテロ型の2つの理論も互いにT双対であることが示される．

T双対と並んで重要な双対性に，S **双対**がある．これは，弦の相互作用定数gを$1/g$で置き換える変換（S変換）に基づいた双対性である．例えば，HOとI–$SO(32)$は互いにS双対であると考えられている．その根拠の一つは，これらの理論の低エネルギー極限である2つの超重力理論がこの変換に対応する変数の取り替えにより互いに一致することにある．ただし，この変換は例えばI型理論の弱結合領域（$g\ll 1$）をHO型理論の強結合領域（$g\gg 1$）に移すので，摂動論的な超弦理論ではその正しさを直接証明することはできない．

このS双対とT双対を組み合わせると，5つの超弦理論のすべてを互いに結び付けることができる（図2）．このことから，現在では，これらのすべてがより統一的な一つの理論から得られると予想されている[5)]．この予想では，この理論はモジュライと呼ばれる連続パラメータにより記述される多くの基底状態を持ち，5つの超弦理論は異なるモジュライ値に対応する基底状態の周りでの摂動論に対応すると考える．さらに，この理論は10次元ではなく11次元の理論である可能性が指摘されている．その理由は，IIA型理論の強結合極限が11次元の超重力理論を低エネルギー極限として持つ理論（**M理論**）となることを示唆する

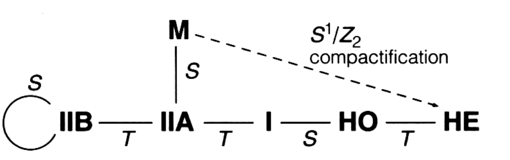


図2　5つの超弦理論の双対性．

いくつかの事実が存在することに基づく．IIA 型 10 次元超重力理論が 11 次元超重力理論の S^1 コンパクト化により得られることもその一つである．この予想に基づいて，現在，この究極の統一理論を実際に構成する様々な試みが行われている．**行列モデル**，**非可換幾何学**に基づく重力理論などはその例である（北澤氏の解説参照）．

双対性の研究は，超弦理論の統一予想のみでなく様々な新たな概念を産み出した．その一つが **D ブレーン**という概念である[5)]．弦理論では，開弦の 2 つの端点にはそれらが自由に運動できるという境界条件（Neumann 条件）を課す．ところが，この開弦理論に例えば x^9 座標に関して T 変換を施すと，境界条件が x^9 座標が一定という条件（Dirichlet 条件）に置き換わる．残りの座標 $x^0, \cdots, x^8$ は自由である．すなわち，端点の運動が 9 次元面上に制限された開弦理論が得られる．この面が D ブレーンである．

ボーズ的理論で閉弦の交換により 2 枚の D ブレーン間に働く力を計算すると，面が張力 $\tau \propto 1/(g\alpha'^{9/2})$ を持つとした場合の重力と一致する結果が得られる．また，この面に端点を持つ開弦の面に垂直な方向の振動モードには，この面の振動に対応する質量ゼロモードが含まれる．これらのことから，D ブレーンは一定の張力 τ を持つ力学的な面と見なすことができる．T 変換をさらに別の座標に関して行うと，その回数に応じて様々な次元の D ブレーンが得られる．一般に，空間的に p 次元（時空的には $p+1$ 次元）の D ブレーンは D_p ブレーンと呼ばれる．

D ブレーンは元々の超弦理論には存在しない．しかし，その強結合領域への拡張を含むと考えられる超重力理論では，この D ブレーンが重力源となっていると解釈できる様々な古典解（ブラックブレーン解）が存在する（図 3）．ブラックホール解もそれらに含まれる．さらに，D ブレーンの量子状態数からそのエントロピー S と質量，電荷の関係を求めると，ちょうど対応するブラックホール解の熱力学公式と一致する結果 $S = A/4$ が得られる．また，D ブレーンに端点を持つ開弦のブレーンに平行な方向の振動モードは，ブレーン上に局在したゲージ場を産み出す．D ブレーンを N 枚重ねると，ひもがゼロ質量のまま異なるブレーン上に端点を持つことができるので，このゲージ場は $U(N)$ ゲージ場となる．したがって，本来重力相互作用のみの II 型理論に D ブレーンを加えると，ゲージ相互作用が付け加わる．II 型の理論と I 型やヘテロ型の理論が双対的になるのはこのおかげであり，弦理論の統一という考え方をより自然なものとする．これらのことから，D ブレーンはひもの非摂動論的凝縮体であり，それらを弦理論に加えることにより，本来摂動論的な弦理論に非摂動論的効果を取り入れることができると考えられる．

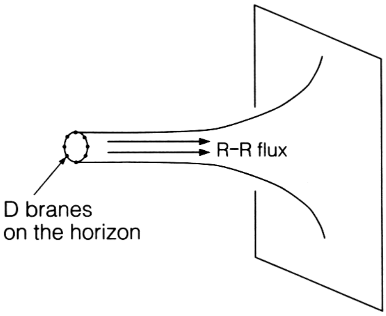


図 3　ブラックブレーン解（D ブレーンの空間的広がりは描かれていない）．

この D ブレーンの登場は，超弦理論にさらに新たな概念を産み出した．その代表が，**AdS/CFT 対応**や**ホログラフィー**である（福間氏及び高柳氏の記事参照）．

6. 検証にむけて

これまで見てきたように，ここ 10 年間の超弦理論の発展は目覚ましく，究極の統一理論の存在を示唆するまでになっている．しかし，それが実際に自然界を記述する理論であることを検証するには，解決すべき様々な問題が存在する．

第 1 の大きな問題は，これらの理論が高次元の理論である点である．何らかの方法で，低エネルギー現象では時空が 4 次元となること，すなわち余分な次元（余剰次元）が見えなくなることを説明する必

要がある．これは**余剰次元コンパクト化の問題**と呼ばれる．第2の問題は，弦理論が持つ唯一のスケールである Planck スケール（$M_{\rm pl}=10^{16}\,{\rm TeV}$）と低エネルギー素粒子現象の標準モデルを特徴付けるスケール（$M_{\rm EW}=1\,{\rm TeV}$）の大きな隔たりである．これは**階層性問題**と呼ばれる．第3の問題は，**宇宙項問題**である．近年の宇宙膨張則の観測および WMAP による宇宙背景輻射非等方性の観測により，現在の宇宙が加速膨張していて，宇宙を満たすエネルギーの 70%程度が正の宇宙項ないし状態方程式 $P\simeq-\rho(<0)$ を持つ物質（暗黒エネルギー）により担われていることがほぼ確実となった[6]（本別冊第 VII 章参照）．この観測事実は2つのことを意味する．一つは，現在の宇宙項 Λ がゼロでなく正であること，もう一つはその値がゼロに近いこと，より定量的には $|\Lambda|/\kappa^2=M_\Lambda^4$ により定義される質量スケールと $M_{\rm pl}$ の比が非常に小さな値 $M_\Lambda/M_{\rm pl}\lesssim 10^{-31}$ となることである．重力を無視した物理法則では真空のエネルギーに相当する宇宙項の値は観測可能な量でなく任意である．したがって，これら宇宙項に関する2つの観測事実を説明することができるのは，重力を含む統一理論のみである．

WMAP の観測は現在の宇宙項のみでなく，宇宙初期の宇宙項についても重要な情報をもたらした．それは，現在の宇宙の平坦性や宇宙ゆらぎのスペクトルに関するインフレーションモデルの予言を確認したことである．このことにより，重力を含む統一理論は宇宙初期に十分なインフレーションが起きることを自然に説明しなければならないという新たな要請が生じた．これは非常に厳しい要請で，**インフレーション問題**と言える．

これら4つの問題は実は密接に関連している．まず，第1の問題に対する一つのアプローチとして，Kaluza–Klein の思想に従い，高次元時空が4次元空間 X と余剰次元 $(D-4)$ のコンパクト空間 Y の積として表されると仮定する：

$$ds_D^2=W(y)^2g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu+g_{ab}(y)dy^ady^b. \tag{7}$$

ここで，W は**ワープ因子**，それが定数でないときには**ワープしたコンパクト化**と呼ばれる．このとき，空間 Y のサイズを L とすると，粒子の Y 方向の運動量の各成分は $1/L$ 程度の大きさに離散化される．このため，粒子のエネルギー E が $1/L$ と比べて小さいとき，Y 方向の運動量はゼロとなる．これは，粒子の波動関数が Y 方向に一様であること，したがって，Y 方向の構造が検出できないことを意味する．

例えば，M 理論の低エネルギー極限である 11 次元超重力理論では，3 階共変反対称テンソル場すなわち 3 形式 A_3 が理論に含まれる．そこで，その場の強度 $F_4=dA_3$ がちょうど 4 次元の体積要素 $\Omega(X)$ に比例するとすると，W が定数の解が得られる．これは，**Fruend–Rubin 型自発的コンパクト化**と呼ばれる．このとき，L は F_4 の大きさに反比例するので，F_4 を十分大きく取ると余剰次元は低エネルギーで見えなくなる．ただし，大きな問題が生じる．それは，4 次元時空が宇宙項 $\Lambda<0$ の真空解に当たる反 de Sitter 時空となることである．しかも，M_Λ は非常に大きな値 $1/(LL_{\rm pl})^{1/2}$ となる．11 次元超重力理論では理論に勝手な宇宙項を加えることが超対称性により禁止されるので，この問題は深刻である．

このように，コンパクト化と宇宙項問題の双方を同時に解決することが困難であるのは，11 次元超重力理論に限らず多くの高次元統一理論に共通する問題である．そのことを端的に表したのが，**Gibbons の No–Go 定理**である[7]．まず，計量が (7) の形を持つとする．さらに，D 次元時空の Ricci 曲率 R_{MN} が任意の時間的ベクトル T に対して強エネルギー条件 $R_{00}=R_{MN}T^MT^N\geq 0$ を満たすとする．この仮定は，11 次元や 10 次元の超重力理論では満たされている．このとき，$g_{\mu\nu}$ の Ricci 曲率 ${}^XR_{00}$ は

$${}^XR_{00}=R_{00}+\frac{1}{4W^4}\triangle_Y W^4 \tag{8}$$

となる．ここで，$\triangle_Y$ は g_{ab} に関する Laplace 作用素である．いま，Y が境界のないコンパクトでなめらかな多様体で W が正則とすると，この式

に W^4 をかけて Y 上で積分すると右辺の第 2 項の寄与はゼロとなる．したがって，4 次元曲率に対する強エネルギー条件 ${}^X R_{00} \geq 0$ を得る．ところが，この条件は宇宙膨張の加速度が負またはゼロとなることと同等である．

このNo–Go定理を克服するには，その仮定のどれかを破る必要がある．その一つの方法は，Y としてコンパクトでない多様体または境界を持つ多様体を考えることである．このアイデアに基づくモデルの代表がRandall と Sundrum により提案された**ブレーンワールドモデル**である[8,9]．このモデルでは，全時空が境界を持つ 5 次元反 de Sitter 空間 dS^5 の領域（とコンパクトな内部空間の積）で表され，この時空の境界面（ブレーン）を我々の住む宇宙と見なす．このような解が存在することは，11 次元 M 理論と HE 型超弦理論の双対性に関する Hořava–Witten の研究により強く示唆されている[10]．このモデルの興味深い点は，それがワープしたコンパクト化であるため，境界面が 2 枚の場合，ワープ因子 W を利用して我々の宇宙の重力定数の大きさを保ったまま，高次元の重力定数のエネルギースケールを TeV 程度にすることが可能である点である．このようにして生まれたのが **TeV 重力理論**である．この理論は，現在計画されている素粒子加速器実験 LHC でのミニブラックホール生成など検証可能な興味深い予言を含んでいる（川崎氏の解説参照）．

もう一つの方法は，D ブレーンと**フラックスコンパクト化**を用いる方法である．II 型超弦理論では，閉弦の右回りと左回りの R–モードの積は整数スピンの粒子となりそれに対応する場は **R–R 場**と呼ばれる反対称テンソル場で表される．D ブレーンはこの R–R 場の源となる **R–R 電荷**を持つ．この R–R 場を用いると階層性問題を解決するのに十分なワープしたコンパクト化が可能となる．このモデルにさらに D ブレーンと $\bar{\mathrm{D}}$ ブレーン（負の R–R 電荷を持つ D ブレーン）を加えることで No–Go 定理の仮定を破り，正の宇宙項が実現される．このアイデアと超弦理論の非摂動的性質に関する様々なアイデアを組み合わせることにより，最初に述べたすべての問題を解決する可能性を秘めたモデルが提案されている（早田・菅野氏の解説参照）．

このように，ループ量子重力理論や超弦理論/M 理論により，冒頭に述べた摂動論的 Einstein 量子重力理論における発散の困難を解消する道が開かれた．さらに，これらの量子重力理論における非摂動的効果の研究は，次元解析ではとうてい困難と思われたこれらの理論の検証を，物理法則の基本的な構造や宇宙スケールの現象についての理論と観測情報を組み合わせることにより可能にしつつある（量子重力理論の非摂動的効果についての様々な試みについては，川合氏，大栗氏及び西村氏の各解説参照）．しかし，新たな問題も生じている．その一つは，フラックスコンパクト化の研究により，低エネルギー理論や宇宙に関する観測事実を説明するモデル（コンパクト化）を含む整合的なモデルが実質的に無限個存在し，それらを特徴付けるパラメータが準連続に密に分布していることが明らかになったことである．特に，理論の整合性だけではこれらのパラメータを決定できない．この問題は，**ランドスケープ問題**と呼ばれている（早田・菅野氏および江口・立川氏の解説参照）．繰り込み不可能性や検証の困難が別の形で再浮上したのである．

参考文献

1) 小玉英雄：数理科学 **476**, 41 (2003). 本別冊に再載.
2) Ashtekar, A. and Lewandowski, J.: *gr-qc/0404018* (2004).
3) Kodama, H.: *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 439 (1993).
4) 小玉英雄：数理科学 **457**, 43 (2001).
5) Polchinski, J.: *String Theory* (Cambridge Univ. Press, 1998).
6) Spergel, D.N., et al.: *Astrophys. J. Supplement* **148**, 175 (2003).
7) Gibbons, G.: *Class. Quantum Grav.* **20**, S321 (2003).
8) Randall, L. and Sundrum, R.: *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370, 4690 (1999).
9) 本別冊の第 V 章の記事参照.
10) Hořava, P. and Witten, E.: *Nucl. Phys. B* **475**, 94 (1996).

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）

I. 序論

量子重力理論の起源

米谷 民明

量子重力の考え方について，ニュートンから弦理論に至る深まりを，数式を最小限にして解説する．量子論と相対論の初等的知識があれば，大筋は理解できると期待している．

1. 前史：ニュートンからアインシュタインへ

17 世紀ヨーロッパで始まった近代物理学では，自然現象はすべてある「力」の作用によって起こると考える．この立場によって初めて，万有引力としての重力を厳密な数学的法則として定式化できた．距離を隔てて存在する物体の間で何故引力が働くのかという根本理由は説明しないが，それを仮定しさえすれば，運動方程式により，データの精密さに応じていくらでも正確に天体の運動を計算・予言できる．ニュートン以後，この考え方を拡張して自然界のすべての現象を理解しようという機械論的な世界観が支配してきた．

しかし，力の概念は 19 世紀の中頃から，ファラデー，マックスウェル等によって提唱・発展させられた場の概念により大きな変更を受ける．電気・磁気の作用は遠隔作用としての万有引力とは違って，電荷の存在とその運動によって，源である荷電粒子の周りに生じる「場」，つまり電場と磁場（あわせて電磁場）の媒介により，遠くに位置する荷電粒子に局所的に作用（近接作用）する．さらに，電磁場は単に力を媒介するだけではなく，真空中でもエネルギー・運動量を伝播させる役割を果たす物理的「実体」であるとの認識がなされた．この謎の実体には，淵源が古代ギリシャのストア派哲学まで遡る「エーテル」の名が冠され，その力学的性質に基づき電磁場を説明する試みが成されたが，結局は混乱を重ねるだけだった．

20 世紀に入って，電磁場と時間・空間の尺度としての座標系の任意性（相対性）をどう調和させるかについて思索を進め，場の古典論の基礎を築いたのが若きアインシュタインである．**特殊相対性理論**では，真空中の光速度が慣性系によらない一定値であるのに基づき，異なった地点での同時性が慣性系に依存する相対的な概念にすぎないことを明らかにした．これに基づき電磁力学を再定式化して，エーテル説にまつわる混乱を解決した．**一般相対性理論**では，慣性系から一般の加速系への理論の拡張を，座標系の変換に対応して得られる加速度と重力加速度が局所的には同等であるという考え，すなわち**「等価原理」**に基づき実行した．重力を，物質質量によって生じる時間空間の幾何学的歪みとしての場（重力場）の概念により定式化したのである．これにより天体現象に関してニュートンの理論では説明できない様々な性質を精密に説明できる．重力場の性質は，場の強さが弱いときには電磁場に近い．こうしてニュートンの万有引力の法則や，それと類似の電気・磁気におけるクーロン力の法則は，より根源的な経験事実である光速度一定の原理や等価原理に依拠する場の理論に置き換えられ深められた．

2. 何故量子重力か—力の起源と量子論—

このように概念が「深められる」とは，言い換えると，より普遍的な有効性を持つ考えに到達したということである．20 世紀に成されたもう一つの物理学の革命である**量子論**は，「力」をさらに普遍的な概念により理解することを可能にした．それ以前においては，力の源および被作用物としての粒子と，力を媒介する場はそれぞれ全く別の概念だが，量子論によれば粒子と場は，本来はある一つの概念からの顕在化の仕方の違いにすぎない．

量子論では，すべての物理量は，「状態」に対する操作（線形演算）を引き起こすものであり，可能な測定値は線型演算子の固有値に他ならない．たとえば，1 個の粒子があるとき，その運動量は，その位置を無限小移動（ただし，虚数軸で）する操作（位置座標 x^i に関する微分 $-i(h/2\pi)(\partial/\partial x_i)$, h はプランク定数）である．一方，「場」には必ず付随する粒子（場の量子とも呼ぶ）が対応し，場の演算子はこの粒子を生成・消滅させる操作と解釈される．電磁場の量子は，光子（photon，フォトン）と呼ばれる．逆に，すべての粒子には対応する場があるのである．たとえば，電子に対応する場（電子場）だ．電子 1 個を位置座標 x_i に生成する操作を引き起こす場を $\psi^\dagger(x)$, 消滅させる操作を引き起こす場を $\psi(x)$（x は位置ベクトル (x_1, x_2, x_3) を表す）と記すと，空間全体で電子の k 方向運動量を表す演算子としての物理量は $P_k = -i(h/2\pi)\int d^3x\, \psi^\dagger(x)(\partial/\partial x_k)\psi(x)$ と書ける．操作は右から左の順序で起こすものとしている．空間の位置 y_k に電子が 1 個存在する状態を想像しよう．そこに P_k の操作を施すと，電子を消滅する操作は積分される座標 x_i の値がちょうど $y_k, i = k$ と一致したときだけ可能で，そこで位置座標を微分する操作が起こり，その電子の運動量が得られる．最後に電子を同じ位置で生成させる操作が起こり，結局全体としては，電子の運動量を得る操作に等しいのである．

電子の電荷によって電磁場が生ずるのは，そのエネルギーが $e\int d^3x\, \psi^\dagger(x)A(x)\psi(x)$ という項を含むのによる．e は電子の電荷，$A(x)$ は，電磁場のポテンシャル（ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル）の適当な成分である．$A(x)$ は光子を生成する操作と消滅する操作が重ね合わさった作用を起こす．従って，電子の存在によって必然的に光子が生成・消滅する．このとき，「力」は力の場に付随する量子の生成と消滅に伴って起こる量子の交換作用に他ならない．つまり，2 個の電子の間に働く力は，一方の電子によって生成された光子がもう一方の電子に吸収され消滅するという一連の作用が引き起こすのだ．

古典的な「場」は抽象的で，具体的に把握するのは難しい概念である．この難しさがエーテル説に結びついたのである．量子論により，場が粒子の概念と不可分なものであるとの認識が進み，むしろ理解しやすいものになったと言える．場が運動量やエネルギーを運び，力を媒介するのは，場の量子が担うと考えれば，不思議ではないし，粒子・場・力の三者がより普遍性を持った枠組みの中で統一されていることも納得できるだろう．

しかし，古典的なスケールでは量子論を特長づけるプランク定数 h がゼロに近いとみなせるため，その極限で「粒子」あるいは「場」という全く異なった振舞いが現れる．たとえば，もし場の量子の質量が古典論の単位で測って値 μ とする．この量子の生成消滅が起こす交換作用の描像に基づき，力を及ぼし合っている粒子の速度が十分小さいとして力のポテンシャルを計算すると

$$V(r) = g\frac{e^{-r/r_0}}{r} \qquad (1)$$

となる．分母が r に等しいのは，空間次元の 3 による．空間次元が D とすると，分母は r^{D-2} である．定数 g は，量子のより詳細な性質によって決まる．一方，力の到達距離を決める定数 r_0 は，$h/\mu c$ に等しい（c=光速度）．何故なら，量子論の不確定性原理により，時間間隔 Δt 程度の解像度で，状態を記述しようとすると，必然的にエネルギーは $\Delta E \sim h/\Delta t$ 程度不確定である．従って，質量 μ の量子が生成消滅するのに必要な Δt の最大値は，$\Delta E > \mu c^2$ から $\Delta t \sim h/\mu c^2$ の程度

である．この間，量子が伝搬する距離 ΔL は高々 $\Delta L \sim c\Delta t \sim h/\mu c = r_0$ 程度となる．

この結果からすると，一般に古典論の極限 ($h \to 0$) では遠方に到達する力は不可能と思えるかもしれない．実は，光子および重力場の量子（重力子と呼ぶ）の質量は厳密にゼロ（$\mu = 0$）なのである．つまり，r_0 は h の値によらず無限大だから，これらの力の場合 $V(r) = g/r$ となり，力は万有引力やクーロン力が示す逆 2 乗則に従う．これに反して，$\mu > 0$ の場合は，$h \to 0$ で $r_0 \to 0$ であるから，「力」には寄与しない．つまり，有限の質量を持った普通の物質粒子と力の場とが古典極限では明確に異なった役割を持つ．しかし，量子論では本来，粒子の役割の区別は存在せず，それらは同等に扱わなければならない．

このように，「力」の起源は量子論でより根源的な説明ができるようになった．この立場からすると，当然，重力とその場も量子論によって理解すべきものである．一般相対性理論がどれほど幾何学的に美しく見えようと，物質の法則が量子論により支配されている限り，量子論の立場から基礎付けがなされなければならない．これが「何故，量子重力か」に対する答えである．

実は，一般相対性理論は古典論の段階ですでに問題をはらんでいる．いくつかの条件の下でアインシュタインの重力場の方程式の解は，時空が無限に歪む特異点を含むこと（特異点定理）が一般的に示されている．たとえば膨張宇宙解では，宇宙は無限大の曲率から始まる．特異点では，古典的な時間空間の概念自体が成立しないという意味で一般相対性理論は破綻してしまう．古典物理学で水素原子を取り扱うと破綻するが，一般相対性理論も似たような自己矛盾を孕んでいるのである．これも量子重力に向かうべき強い理由の一つである．アインシュタイン自身，特異点をきらい，避けるための試みを行っている．しかし，彼は量子力学が確立した 1930 年以後，量子論が「物理的実在」の完全な記述になっていないとの信念から，その後の量子論の発展を全く取り入れることなく，古典場の理論の枠内での「**統一場理論**」の研究を続けたが，不成功のうちに生涯を閉じた．

ところで，関係式 $r_0 = h/\mu c$ を初めて意識的に用いて，電磁力，重力とは異なった新しい力，すなわち**核力**（原子核を構成する力）の存在を論じたのは，湯川秀樹である．原子核の広がりが 10^{-12}cm 程度であることから，核力に対応する新しい素粒子＝中間子を提唱しその質量を予言した．その後の発展により，自然界の基本的な力は，電磁力，重力に併せて，核力に関係した「**強い力**」と，湯川の少し前にフェルミが提唱した理論から始まる「**弱い力**」の 4 種からなるとの認識が，実験的検証を経て 1950 年代までに確立した．そして，60 年代から 70 年代にかけてこれらの相互作用をより統一的で普遍的な仕方で理解しようとする研究が開始された．現在の量子重力研究の位置づけは，そうした進展を踏まえてなされなければならない．

3. 一般相対性理論の「量子化」の破綻

それでは，量子重力へ向けてどういうアプローチが考えられるか．電磁場の場合は，電磁場の古典論であるマックスウェル理論を，量子力学のレールの上に忠実に乗せることで成功できた．これは，1940 年代終盤から 50 年代初めにかけて，朝永，シュウインガー，ファインマン等の主導でなされた発展による．前節で述べた量子場の考え方は確かに普遍的で強力な論理なのだが，計算の精度を上げようとすると問題に遭遇する．精度は，当然，量子の生成・消滅の過程をどこまで精密に取り入れるかに依存し，関与する量子＝粒子の個数は精密になるにつれ多数になり，複雑な過程を考慮しなければならない．たとえば，時間解像度 Δt をどんどん小さくしてゆけば，エネルギーの不確定さ $\Delta E \sim (\Delta t)^{-1}$ が限りなく増大するため，$\Delta t \to 0$ 極限でほとんど常に計算には無限大が現れる．電磁場の場合には，この無限大は実は異なった実験の間の相対的な関係だけに限れば，打ち消し合い，無害なものである．物理学のあらゆる定数は，すべて実験データに基づいて決められているので，計算の途中に現れた無限大は計算手法の不手際に

過ぎないと見なせる．この方法（「繰り込み」）により，重力以外の3種の力はすべてゲージ理論と呼ばれる量子場理論に基づいて極めて精密に説明できることが，1980年代前半までに確立された．たとえば，電子の磁気能率の計算値と実験値の一致は11桁の精度で確かめられている．

重力の場合も同じように，一般相対性理論を量子力学のレールに載せてやればよいと期待するだろう．一般相対性理論の幾何学的構造を保ちつつそれを行うのは，それほど容易なことではないが形式的には可能である．しかし，繰り込みの手法は破綻する．その理由は等価原理にある．等価原理により，重力場の強さは常にその源の持つエネルギーや運動量に比例する．たとえば，前のポテンシャルの式の比例定数 $g=-GM_1M_2$（M_1, M_2 は重力を及ぼし合っている物体の静止エネルギーに比例する）は，エネルギー E による重力子の生成・消滅の強さが $\kappa E/c^2$ に比例することからの帰結である（$\kappa=\sqrt{G}$）．一方，クーロン力の場合，g は力を及ぼし合う電荷の積に等しいから，光子の生成・消滅の強さは電荷だけによって決まる．

以後の議論をできるだけ簡略にするため，場の量子論で標準的な $c=h=1$ となる単位（自然単位）を用いて話を進める．この単位系では，すべての物理量を長さの次元 L だけを用いて表せる．たとえば，エネルギー，運動量，質量の次元は同じ L^{-1} である．一方，時間は長さの次元 L を持つ．ポテンシャル係数 g は無次元であり，単位電荷当たりの光子の生成消滅の強度も無次元である．これに反して，重力子の単位エネルギー当たりの生成消滅強度を決める定数 κ の次元は L である．もし重力子が n 個関与する生成・消滅過程を考えると，その強度は，次元 L^n の定数 κ^n に比例し，時間解像度が Δt 程度の精度の計算では強度が $(\kappa/\Delta t)^n$ となり，$\Delta t\to 0$ の極限で限りなく増大する．そのため，量子重力の効果を計算すると，エネルギー不確定性だけには帰せない新たな無限大が生じるのだ．繰り込みの処方により無限大を打ち消そうとしても，無数に多くの未定の実験量を導入しなければならず，理論の予言力が失われてしまう．このような場合，理論は**繰り込み不可能な理論**であると呼ばれる．電磁相互作用を含む他の3種の力の場合は無次元の定数で特長づけられるため繰り込み可能だが，一般相対性理論そのものを量子論で扱うと，繰り込み不可能性の困難が避けられない．

加えるに，重力場の量子論には概念的に様々な問題がある．量子論の「状態」は，一般に古典的には異なった状態に対応するものが重ね合わさったものである．だからこそ，物理量が状態に対して「線形」に作用できる．このため，状態は「揺らい」でおり，確率の概念によってしか，正当な解釈ができない．量子重力では重力場が揺らぐわけであるが，それは時空の幾何学，従って時間・空間そのものが重ね合わさることを意味する．通常の量子力学の定式化がそのような場合に適用できるものかどうかは，自明ではない．

このような概念的困難をひとまず忘れ，上に述べた無限大が現れないような低い精度で重力を取り入れた量子論を調べてみると，おもしろいが奇妙なことが起こる．最も有名なのは，ホーキングによるブラックホールの取扱いである．ブラックホール時空の周りで，任意の量子場を調べると，ブラックホールからその表面での重力の強さに比例した温度での輻射が起こるという結論が得られる．それにより，ブラックホールはエネルギーを失い最終的には消滅してしまうと予想されるが，それでは，ブラックホールに落ち込んだ情報が消失することになり，量子力学による時間発展の原理である「**確率保存**」と矛盾してしまう．この種の議論は「低い精度」での話であるが，「高い精度」の議論は無限大の困難のため実行できないだけでなく，実際にブラックホールが消滅する過程を扱うには，時間空間そのものの変容を正しく取り扱う量子論が必要だが，それは存在していない．

4. 弦理論から開いた展望と課題

このように，一般相対性理論をそのままの形で量子論のレールに乗せるのは，技術的にも概念的

にも問題が多く不自然であり，正当であるかどうかは極めて疑わしい．そこで，どう進むかについては，様々な立場があり得る．重力以外の力は量子論とよく調和していると考えれば，一般相対性理論を量子論と調和しやすい別の理論に置き換えるという道（立場 A）がある．逆に，量子論そのものを一般相対性理論に調和するように変更するという可能性（立場 B）も否定できない．アインシュタインは B を夢見たわけである．彼が拒否した量子論の通常の解釈に関連して，量子力学そのものを変更すべきとの考えもあるが，筆者が知る限り，具体的に一般相対性理論を視野に入れて議論できるような説は知られていない．

一方，A の観点からは，まず A1) 重力子を基本的な自由度ではなく物質場からその複合状態として導こうとする立場がある．これは，ノーベル平和賞で名高いロシアの物理学者サハロフが60年代に提唱したアイデア（誘起重力と呼ばれる）に近い．しかし，技術的に大変困難である．物質側で量子効果を高い精度で取り入れるのが不可欠だが，通常の場の理論の枠内で一般相対性理論の幾何学的構造に対応する対称性を生成することはほとんど不可能である．A2) 一般相対性理論の対称性を量子論と調和しやすい形式で拡張して，重力子の量子効果に関する精度を上げたとき現れる無限大を打ち消すという可能性も考えられる．その典型は，下で弦理論との関係で触れる「超対称性」に基づく超重力理論である．また，高エネルギーで共形対称性と呼ばれる高い対称性を課す可能性もある．A3) 重力場を表す変数を通常の計量テンソルではない別ものに変更して量子化を行う立場，たとえばループ重力や，格子重力と呼ばれる方法によるアプローチもある．紙数の関係で論ずる余裕がないが，A1 と違った意味で，一般相対性の長距離での実現可能性に関して，方法自体に起因する困難がある．

弦理論は A, B どれでもないが，どちかというと A に近い立場で，ある意味で A1～A3 の要素を総合する仕方で新たな展望を開いた．弦理論はもともと量子重力のために提唱されたものではないし，完成した理論でもない．また，その実験的検証可能性についても今のところ見通しはついていない．しかし，その内容が解明されるにつれ，実は量子重力の困難を解決し，すべての力を統一するのに理想的な構造を備えた理論であることがますます判明してきた．その歴史*1) を説明する余裕はない．残りの紙数で，何故重力と関係するのか，また新たな展望とは何か，に絞って論じよう．

弦理論の出発点は，それまでの場の量子が大きさのない点であったのに代えて，1 次元的にのみ拡がった弦 (string) を仮定するところにある．弦と言っても通常の紐のようなものとは全く異なる．たとえば，その運動の自由度は弦に直交する方向にのみ意味があり，弦の接線方向の運動には物理的意味がない．これに関連して，弦が単位長さ当たり持つ静止エネルギーは一定の普遍定数 $1/\alpha'$ である（自然単位で次元は L^{-2}）．弦には，ゴム輪のように「閉じた弦」と，端を持った「開いた弦」の 2 種類がある．量子論で取り扱うと，前者は必然的に質量がゼロでスピン（自転角運動量）が 2 の状態，後者は質量がゼロでスピンが 1 の状態を含む．これは，重力子と光子が示す性質である．閉じた弦は，開いた弦の複合状態と見なすこともでき，立場 A1 を実現しているとも言ってよい*2)．単位長さ当たりのエネルギーが有限であるのに，質量ゼロの状態が得られるのは，直観的には弦の長さがゼロの状態に対応する．実際には，量子論の特徴であるゼロ点振動の効果により拡がるため，ゼロでない自転角運動量が結果として得られるのだが，エネルギーを計算するとあたかも質量ゼロの粒子として振る舞うのである．

それだけではなく，これらの状態の相互作用の詳細を調べると，正に一般相対性理論や電磁場理論の量子に相当する性質を示す．それには，上に述べた弦の性質を保証するための対称性（共形対称性）が重要で，それが等価原理に起源を持つ対

*1) 歴史的経緯は，英文だがケンブリッジ大学出版会から出版予定の本 “The birth of string theory”（筆者の寄稿論文 arXiv:0901.0079, *Gravity from strings: personal reminiscences of early developments* を含む）に詳しい．

*2) サハロフは後年，弦理論のことを知って，自分のアイデアが実現されていると感じ「誇りに思う」と述べたそうである．

称性（一般座標不変性）を自動的に含むのである．加えて，開いた弦があれば必ず閉じた弦が存在しなければならない．要するに，歴史上初めて，万有引力の起源が「説明」されたと言って過言ではない．

重力定数を有限に保って定数 α' がゼロになる極限では，重力子とその仲間の質量ゼロ粒子は，一般相対性理論を含むように超対称性に基づき拡張された重力場理論である超重力理論によって記述される．弦理論は「超」弦理論とも呼ばれるが，ここにその理由がある．超対称性とは，一般にスピンが整数（$0, 1, 2, \ldots$）の（ボース）粒子と半整数（$1/2, 3/2, \ldots$）の（フェルミ）粒子を混合する変換の下での対称性のことである．重力子，光子は前者に属するが，電子，ニュートリノ，クォーク（いずれもスピン 1/2）は後者に属する．量子場によって，一般的枠組みとしては，力に寄与する粒子と，物質の構成要素としての粒子の記述は統一されたわけだが，超対称性はその区別を取り払い，より一層統一的な記述を可能にする．ボース粒子とフェルミ粒子の量子効果は，多くの場合逆の符号で寄与するので，超対称性は量子効果を部分的に打ち消す役割を果たし，弦理論でも重要な意味がある．これが，前に述べた立場 A2 に用いられた理由である．ただし，弦理論の本質が超対称性にあるわけではないことは強調しなければならない．

そうではなく，α' の存在により，重力子の高エネルギーでの生成消滅強度（$E \sim 1/\Delta t$ による $(\kappa E)^n$ を思い出してほしい）に起因する無限大を，新たな因子 $e^{-\alpha' E^2}$ により自然に打ち消してしまう効果が生ずる．$\Delta t \to 0$ では，弦が 1 次元方向へ限りなく広がるために，その相互作用の強さが結果的に指数関数的に弱くなるのだ．つまり，弦の量子論から自動的に一般相対性理論や電磁相互作用などの量子が導かれると同時に，繰り込み不可能性の困難を完全に解消するメカニズムが得られたのである．弦理論以外のアプローチで，これらすべてを実現する仕方は知られていない．

さらに，開いた弦の端点の自由度を表す D ブレーンと呼ばれる新たな力学的自由度の役割についての認識により，この 14–15 年，目覚ましい進展がなされた．たとえば，ブラックホールの量子論の問題や，弦理論の新たな分野への応用（たとえば AdS/CFT 対応など）に関連して重要な展望が開かれた．これまでは重力理論と全く無関係であった現象について，弦理論で得られた展望により関係が見えてきているのである．それらについては，本書の解説のいくつかで論じられている．

弦理論が長さの次元を持つ普遍定数 $\sqrt{\alpha'}$ を必要とするのは，量子重力理論として極めて自然なことである．すでに説明したように，重力は量子論では長さの次元を持った定数 $\kappa = \sqrt{G}$ で特長づけられる．しかし，場の量子論の通常の枠組みにとどまる限り，この長さが具体的に何の長さに対応するのかは不透明である．弦理論は，一般相対性理論が依拠する時空の古典的な幾何学的描像の適用限界を，弦の広がりという明確な概念により指し示していると見るべきである．その真の意味は未だ十分には解明されていないが，量子論の枠組みを重力と調和する方向に深める方向への重要な手掛かりであるに違いない．その方向ではアインシュタインが固執した立場 B ともつながり得る．しかし，現在の弦理論理解は，弱い重力で有効な，普通の平坦な背景時空を運動し相互作用する弦という段階を出ていない．弦は本質的に広がったものだから，点描像に依拠する古典幾何学を乗り越え，弦ないしは D ブレーンに基づいた「量子弦幾何学」とでも呼ぶべき新たな枠組みがなければならない．これは立場 A3 の先鋭化とも言える．本論では触れ得なかった弦理論の 4 次元を越えた時空次元（10 次元，または 11 次元）と 4 次元時空との関係もその立場から見直し，本来は，弦の概念に基づいて，時空の捉え方そのものが完全に再定式化されなければならない．それは，私見では既存の数学で捉えきるのは困難であるし，通常の量子力学の枠組みを拡張したものであることは疑いない．そこに到達するには弦理論の背景にあるべき基本原理を発見する必要があるだろう．

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

I. 序論

素粒子論の現状と展望

量子重力の立場から

川 合 光

1. はじめに

自然界には多種多様な現象があるが，そのもとになる基本法則は単純なものにちがいない．それを追求するのが素粒子論であるが，過去100年間で大きく理解が進み，今やすべての物質と力を統一的に記述できる可能性が見えてきている．素粒子の標準模型が確立したのは1980年代の初頭であるがそれ以来，標準模型と矛盾する現象は何一つ見つかっていない．後で述べるように，多少の修正は必要かもしれないが，我々は重力以外についてはほとんど正しい理論に到達しているといえるだろう．最後に残った重力と標準模型を統一する試みのうち，もっとも有望なのが超弦理論である．超弦理論は，1980年代の摂動論の時代，1990年代の非摂動効果を理解する時代を経て，現在は最終的な定式化を模索している段階である．超弦理論が本当に究極理論なのか，あるいはさらにその下の階層があるのかはわからないが，いずれにしても人類の自然認識が大きく飛躍する時代を迎えていることは確かと思われる．

2. 素粒子論の現状

2.1 標準模型

自然界の物質のもとになる基本粒子はクォークとレプトンとよばれる2種類に大別され，それぞれ6種類あることがわかっている．また，これらの間には4つの力が働いている．電磁力，弱い力，強い力，それから重力である．このうち重力をのぞいた3つの力とクォーク・レプトンの相互作用は，標準模型とよばれるゲージ場の量子論によって非常にうまく記述されている．現在の加速器で到達できるエネルギーは数百GeV，距離に換算すると10^{-17} m くらいであるが，少なくともこの範囲で，標準模型と矛盾する実験結果は知られていない．

標準模型に現れる粒子のうち，まだ実験で確認されていないものが一つだけあり，ヒグス粒子とよばれている．ヒグス粒子は欧州共同体のLHCとよばれる加速器により数年のうちに発見されると思われるが，その質量は素粒子物理の今後の方向を決める上で重要である．もし，ヒグス粒子の質量が150 GeVから200 GeVの間にあれば，標準模型はプランクスケール，すなわち重力との統一が重要になるスケールまで修正を加える必要がない．一方，ヒグス粒子の質量が150 GeV以下であれば，標準模型を拡張して，超対称性という大きな対称性をもつようにしたほうが自然である．また，ヒグス粒子の質量が200 GeV以上であれば，ヒグス粒子自身が複合粒子である可能性が高い．この場合，クォークやレプトンも複合粒子であり，標準模型よりもっと基本的な構造が，数百GeVのエネルギー領域で見えてくるかもしれない．この

ように，標準模型自身を適宜修正していく必要はあるかもしれないが，いずれにしても，ゲージ場の量子論の枠内で遂行できると思われる．

2.2 重力とプランクスケール

一方，重力まで含めた量子論を作るのは大変難しい．それは，重力以外の 3 つの力はくりこみ可能であるのに対して，重力はくりこみ不可能だからである．すなわち，重力場は波長の短いフーリエ成分ほど大きな量子ゆらぎをもつため，時空の各点で値が与えられるとする普通の場では，なかなかうまく表せない．大雑把にいうと，重力は点粒子の現象ではなく，何か拡がりをもった現象としてとらえたほうが自然なのである．この拡がりの大きさは，アインシュタイン方程式から計量場の量子ゆらぎを見積もってみればわかる．そうすると，あるスケールより短い波長のフーリエ成分は大きなゆらぎをもち，それより短い距離を考えること自体が意味をなさないことがわかる．これが上にも述べたプランクスケールであり，ニュートン定数と光速とプランク定数から作られる長さの次元を持った量に他ならない．その値は $10^{-35}\,\mathrm{m}$ である．

ここでは，場のゆらぎに注目したが，力の大きさに注目しても同様なスケールがでてくる．例えば，2 つの電子の間に働く電気力と重力の大きさを比べてみる．2 電子間の距離が電子のコンプトン波長に比べて大きいときは，電気力はクーロンの法則に，重力はニュートンの万有引力の法則に従うとしてよい．どちらも逆 2 乗法則であるが，比例係数の大きさはまったく異なっており，重力は電気力に比べて 42 桁も小さい*1)．ところが，2 つの電子を近づけていくとまったく違う様相が見えてくる．電荷は距離によらない量であるから，電気力は距離がコンプトン波長より短くなっても基本的に逆 2 乗法則に従う．実際は，対数的な量子補正を受けるが，それほど大きな効果ではない．一方，重力はエネルギー間の力であるため，距離がコンプトン波長より短くなると，距離の 4 乗に逆比例して大きくなる．これは，各電子のエネルギーは超相対論的な領域では波長の逆数に比例して大きくなるからである．そうすると，2 電子間の距離がコンプトン波長の 10^{-21} 倍程度になると電気力と重力はほぼ同じ大きさになるはずである．この距離の値は $10^{-34}\,\mathrm{m}$ である．これは上で述べたプランクスケールと 1 桁違うが，これは電気力の大きさ自身が無次元量で表すと $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ と 1 より少し小さいからであり，もしこれが 1 程度であればここで考えている長さはプランクスケールと完全に一致する．

2.3 大統一理論

上では例として電気力をとりあげたが，重力以外の 3 つの力はどれもゲージ場の量子論で表すことができ，互いによく似ている．これらの力は，電気力について述べたように，量子補正のため，近距離では逆 2 乗則から対数的にずれる．そのずれを計算してみると，あるスケールで 3 つの力がほぼ同じ大きさになることがわかる．そのスケールを大統一スケールとよんでいるが，値は $10^{-32}\,\mathrm{m}$ であり，上でみたものより，2 桁ほど大きい．

この 2 桁の違いをまともに受け止めるか，あるいはほとんど同じだとみなすかは立場の分かれるところであるが，前者の立場に立つと，次のようなことが起こっているといえる．現在の加速で直接見ることができる $10^{-17}\,\mathrm{m}$ くらいの距離では 4 つの力の大きさはずいぶん異なっている．しかしそれらは近距離になるにつれだんだん等しくなっていき，大統一スケールくらいの距離で重力以外の 3 つの力は同程度の大きさとなる．実際，大統一スケールで 3 つの力が統一されるようなモデルをゲージ場の量子論に基づいて作ることができ，大統一理論とよばれている．大統一理論では，3 つの力が一つのゲージ対称性として統一されるだけでなく，クォークとレプトンも統一的に表される．大統一スケールのさらに 100 分の 1 の距離，すなわちプランクスケールでは，重力までふくめて 4 つの力がすべて同程度の大きさとなる．しか

*1) このような小さな力であるにもかかわらず，我々が日常的に電気力よりも重力を感じているのは，電気力は電荷の間の力であるため，プラスとマイナスで相殺するのに対し，重力はエネルギーの間の力であるため決して相殺しないからである．

し，上で述べたように，そこではもはや点粒子を基本とするのは不可能であり，本質的に拡がったものを考える必要がある．

2.4　超弦理論

このように考えると，プランクスケールくらいの拡がりをもったものがすべてのもとになっているとするのが，きわめて自然であることがわかるだろう．しかしながら，拡がりをもったものを勝手に導入すると，大抵の場合，因果性や確率の正定値性を破ってしまい，矛盾のない理論を作ることができない．その唯一の例外が超弦理論である．超弦理論では，点粒子の代わりに，1次元的に拡がったひものようなものを基本とする．輪ゴムのように閉じたひもとウナギのように両端のある開いたひもが考えうるが，以下では簡単のため閉じたひもを考える．輪ゴムを遠くから見ると点に見えるが，それを標準模型に現れる粒子とみなすのである．輪ゴムはぶわぶわと振動しているが，その振動状態のちがいが，標準模型におけるクォーク・レプトン，ゲージ粒子，ヒグス粒子といった粒子の種類に対応している．さらに著しいことに，重力子も輪ゴムの一つの振動状態として現れる．すなわち，超弦理論では重力まで含めたすべての力と物質のもとになるクォーク・レプトン，そしてヒグス粒子が一つの弦の振動のちがいとして統一的に表されるのである．また，輪ゴムは振動しながら切れたりくっついたりできるがそれが粒子間の相互作用を表している．しかも弦は拡がりをもつため，上述のような量子ゆらぎが大きすぎるという困難もないこともわかる．

このように超弦理論は重力を含むすべての基本粒子を統一する理論として有望であるが，現時点では大きな弱点も抱えている．一言でいうと，理論の完全な定式化がまだわかっていないということである．現在の超弦理論の定義は，摂動論にもとづいている．すなわち，自由に伝播する弦を出発点とし，相互作用はべき展開でとりいれる．しかしながら，二重井戸の量子力学のように，摂動論では基底状態が正しく求められないことが多い．実際，時空が4次元であるような摂動論的な基底状態は無数に知られているが，真の基底状態がどのようなものであるかを調べる方法が確立していないのである．通常の場の量子論でも同様な問題があったが，格子ゲージ理論によって，摂動論にたよらない完全な定式化ができるようになり，種々の問題を解決することができた．超弦理論の完全な定式化がわかれば，究極の理論に向けて大きな一歩を踏み出せるであろう．

3. 素粒子論の将来

素粒子論にとって，2～3年のうちにおきる大きな転機はヒグス粒子の発見であろう．上に述べたように，ヒグス粒子の質量によって進むべき方向性がかなり変わってくると思われる．個人的には，ヒグス粒子の質量が150 GeVから200 GeVの間にあり，標準模型はプランクスケールまで修正を受けないというのがもっともすっきりしていると思う．その場合，ヒグス粒子の質量は，宇宙項と同レベルの問題として，超弦理論から説明することになるだろう．ヒグス粒子の質量がこの範囲にない場合は，標準模型に修正を加える必要があるが，場の量子論の一般的枠組みの中で展開できると思われる．それ自身，大変面白い問題であり，しかも道具立てはできているわけであるから，斬新な面白みはないかも知れないが地道に進めていくことができるだろう．その過程で，いわゆるダークマターが何であるかもわかってくるだろう．

いずれにしても重力を含む統一理論として，超弦理論が本質的に重要であることに変わりはなく，超弦理論の研究は続けられるだろう．上に述べたように，超弦理論では，摂動論にたよらない定式化を見つけることが最大の課題であり，それが完成した暁には，超初期宇宙をはじめ，宇宙項や標準模型のパラメーターの説明など，今までまったく予想されなかったような多くの知見が得られるようになると思われる．その可能性の一つに行列模型といわれているものがあるが，この理論が表す基底状態をよい精度で計算する方法がわかって

おらず，本当にこれでいいのか検証できない状況である．

超弦理論の完全な定式化ができたとすると，その先には大別して2つの可能性があるだろう．一つの可能性は，超弦理論の基底状態が唯一に定まっている場合である．この場合，もし超弦理論が正しければ，基底状態は我々の宇宙を表しているはずである．そうすると，超弦理論は自由なパラメーターをもたないので，標準模型に含まれる30個ほどのパラメーターは，すべて超弦理論から計算によって求められることになる．その結果が本当に標準模型のパラメーターを再現していれば，我々は究極の理論を手にしたといってもいいだろう．逆に，超弦理論の計算結果が標準模型とずれている場合は，超弦理論自身を修正していくという作業に取り掛かることになるだろう．もう一つの可能性は，超弦理論の基底状態が無数にある場合である．この場合は，我々の宇宙が標準模型によって表されているのは，たまたま宇宙の初期状態がそのようになっていたからだということになり，残念ながら面白みにかけることになってしまう．ランドスケープ等，基底状態が無数にあることを前提にして，標準模型で表される宇宙がどれくらい自然に現れるかを議論しようという試みもある．超弦理論が完全に定式化されない限り，不可知論の域を超えるのは難しいように見えるが，可能性の一つとして議論しておく価値はあるだろう．

いずれにしても，LHCをはじめとする実験結果をながめながら，必要ならば従来の場の理論の範囲で標準模型を変更していくのと超弦理論を理論的に完成させて究極の理論を探していくという2つのアプローチが大切である．これらを同時に進めるのが，完全な統一理論を見つけ出すための王道であり，しかも結果的にはそれが近道になっているのだと思う．

4. 場の理論としての量子重力の最近の話題

上にも述べたように，重力を量子力学的に表すもっとも有力な候補は超弦理論であるが，通常の場の量子論の枠組みで重力を議論できる可能性がまったくないわけではない．いくつかの試みがあるが，ここでは最近注目を集めている2つの話題について紹介する．一つは，ここ数年議論されている $N=8$ 超重力の有限性に関するものであり，もう一つは今年になって出てきたHořavaの理論である．まず，通常の場の理論によって量子重力を表すことの問題点についてまとめ，その後，2つの話題について議論することにしよう．

4.1 紫外発散と重力のくりこみ不可能性

場の量子効果を素朴に計算すると，波長の短いモードが大きな量子ゆらぎをもつためにいろいろな量が無限大になってしまうことが多く，紫外発散とよばれている．これを避けるために，実際に観測される物理量を有限にするように，場の作用に現れるパラメーターを無限大に調節してやることをくりこみとよんでいる．このようなことは，いつでもできるわけではないが，発散の度合いがあまり激しくなければ可能である．次元解析から，結合定数の自然単位における次元が質量次元[M]の非負べきのときは可能であり，負べきのときは不可能であることがわかる．例えば，重力を含まないゲージ理論は結合定数が無次元であり，くりこみ可能である．一方，重力場と他の場，あるいは，重力場どうしの結合定数は，ニュートン定数に比例し，次元は質量の -2 乗であり，くりこみ不可能である．

4.2 高階微分理論のくりこみ可能性と正定値性の問題

通常の重力理論はくりこみ可能ではないので，高階微分を含んだ作用を考えたくなるのは自然であろう．すなわち，重力場の作用として

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left(a\,R+b\,R^2+c\,R^3+\cdots\right) \tag{1}$$

のようなものを考える．ここで g は計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ の行列式，R は $g_{\mu\nu}(x)$ から決まる曲率である．右辺の第1項は通常のアインシュタインの作用であり，これだけでは理論はくりこみ可能ではない．

ところが，第2項以下のようなものを加えると，量子ゆらぎが抑えられてくりこみ可能になるのである．この事情を少し詳しく見てみよう．上記の作用を平坦な時空の周りで展開し，フーリエモードで表すと，

$$S = \int d^4k \left(ak^2 + b\left(k^2\right)^2 + c\left(k^2\right)^3 + \cdots \right) |h_{\mu\nu}(k)|^2 + \cdots \qquad (2)$$

のようになり，これから，重力場の量子ゆらぎが

$$\left\langle |h_{\mu\nu}(k)|^2 \right\rangle = \frac{1}{ak^2 + b\left(k^2\right)^2 + c\left(k^2\right)^3 + \cdots} \qquad (3)$$

となることがわかる．ここで，$h_{\mu\nu}(k)$ は計量場の平坦な場合からのずれ $h_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}$ の波数 k のフーリエ成分である．$b, c, \cdots$ がゼロのときは，ゆらぎは k が大きいところで k の -2 乗に比例するのに対し，$b, c, \cdots$ がゼロでないときはもっとはやく減少し，くりこみ可能になっているのである．

しかしながら，この理論は確率の正定値性を破るという致命的な欠陥をもっている．(3) の右辺を部分分数に分けると，

$$\left\langle |h_{\mu\nu}(k)|^2 \right\rangle = \frac{A}{k^2} + \frac{B}{k^2 + m^2} + \frac{C}{k^2 + m'^2} + \cdots \qquad (4)$$

のようになるが，係数 $A, B, C, \cdots$ のうち，少なくとも一つは負である．なぜならば，すべて正であれば，k が大きいところで k の -2 乗に比例するからである．一方，係数 $A, B, C, \cdots$ はそれぞれ，重力子が伝搬する途中で質量が $0, m^2, m'^2, \cdots$ の粒子に変化する確率を表しており，負の係数は負の確率を意味している．この事情は，重力に限られたことではなく，場の理論すべてに共通である．一般に相対論的な場の理論において，微分の数が2個以下の作用しか考えないのはこの理由による．

4.3 $N = 8$ 超重力の有限性

超対称性という言葉はヒグス粒子の質量と関連して上にも触れたが，フェルミオンとボソンをまぜる対称性のことである．一般に量子ゆらぎの効果はフェルミオンとボソンで逆の符号に出るため，そのような対称性があると紫外発散が相殺される傾向がある．また，超対称性は1つだけとは限らず，いくつかの超対称性が共存することも可能であるが，超対称性の数が多いほど，紫外発散の相殺が強まることが知られている．例えば，重力を含まない通常のくりこみ可能な場の理論では，超対称性をもたない場合は紫外発散は一般に2次の発散であるが，超対称性が1つあると，2次発散はなくなり，対数発散だけが残る．超対称性を2つに増やすと，発散は単純な過程からくる対数発散のみとなり，複雑な過程には紫外発散はない．さらに，超対称性を4つにすると，紫外発散は完全になくなることが知られている．

ここで，超対称性の数には上限があることを注意しておこう．超対称性はフェルミオンとボソンをまぜる変換であるため，超対称性の変換をするとスピンの z 成分が1/2ずつ変化する．そのため，超対称性が4つあるときは，それらを順次作用させると，スピンの z 成分は，-1 からはじめたとすると，-1, $-1/2$, 0, 1/2, 1 と変わっていく．このことから，重力と結合していない場の理論のもちうる超対称性は最大で4つであることがわかる．なぜなら，仮に超対称性が5つ以上あるとすると，上の議論からスピンの大きさが3/2以上のものが必要になるが，それは重力と結合しているときにのみ可能だからである．一方，重力を含む場の理論では，スピンの大きさは重力子の2が最大である．そのため，超対称性は8つまであってよい．それは，-2 からはじめれば，8つの超対称性を順次作用させることにより，スピンの z 成分は -2, $-3/2$, -1, $-1/2$, 0, 1/2, 1, 3/2, 2 と変化し，上限値である2以内に収まっているからである．超対称性をもつ重力理論を超重力とよんでいるが，この意味で8つの超対称性をもつ超重力は特別なものであり，$N = 8$ 超重力とよばれている．

この数年話題になっていることの一つが，$N = 8$ 超重力には紫外発散がないという予想である．こ

の可能性自身は，1970 年代から長らく議論されてきたが，具体的な計算がほとんど不可能だったため，いわばお蔵入りの状態であった．ところが，ここ数年，量子重力の摂動計算の手法が飛躍的に進歩し，いくつかの具体的な計算ができるようになってきた．摂動論の全次数に対する一般論はまだできていないが，少なくとも現在までに計算された量に関する限り，確かに紫外発散はない．仮にこの予想が正しいとすると，通常の場の理論の範囲でも紫外発散がない重力理論が存在するという点で大変興味深い．しかしながら，このような特殊な理論をどのようにして標準模型と組み合わせるのか見当もつかない．今後の発展が待たれるところである．

4.4 Hořava 理論

最近話題になっているもう一つが Hořava 理論である*2)．上に述べたように，高階微分を含む重力理論はくりこみ可能であるが，確率の正定値性をこわしてしまう．そこで，時間微分の数は 2 のままにしておいて，空間微分の数だけ増やしてみたのが，Hořava 理論である．(4) では，4 次元的な共変性を仮定したため振動数と波数は区別しなかったが，正定値性にとって重要なのは振動数に対する部分である．それゆえ時間微分の数さえ 2 以下であれば，正定値性はこわさずにすむのである．一方，くりこみ可能性のほうは，空間微分の数が十分に大きければ満たすことができる．

このようなことをすると，時空の対称性は壊れてしまい，一般座標変換に対する不変性はなくなってしまう．しかしながら，各時刻において独立に空間座標をまぜる変換は保つことができる．すなわち，一般座標変換のうち，時間一定の超曲面を不変に保つものだけを考えようというのである．これはもとの一般座標変換のほんの一部のように見えるが，それにもかかわらず，いくつかのパラメーターを調整するだけで，低エネルギーでアインシュタイン方程式が再現するようにできるというのである．

いまのところ，このような理論が本当に矛盾なく定義できるか，仮に理論的には矛盾がなくても，素粒子物理や宇宙物理の観測と矛盾していないか明らかではないが，追及する価値は十分あると思われる．

*2) これは，物性論的な動機から Lifshitz によって議論された理論と共通点があるため，Hořava–Lifshitz 理論ともよばれている．

参考文献

1) $N = 8$ 超重力の有限性について最近の論文の一つをあげておく．
The Ultraviolet Behavior of $N = 8$ Supergravity at Four Loops. Z. Bern, J.J. Carrasco, L.J. Dixon, H. Johansson, R. Roiban. arXiv:0905.2326 [hep–th].

2) Hořava–Lifshitz 理論の原論文は以下のものである．
Quantum Gravity at a Lifshitz Point. Petr Hořava. *Phys. Rev.* **D79**: 084008, 2009.

（かわい・ひかる，
京都大学大学院理学研究科/
理化学研究所仁科加速器研究センター）

II. 超弦理論からの展開

II. 超弦理論からの展開

超弦理論におけるランドスケープ問題

江口 徹・立川 裕二

1. はじめに

D–ブレーンの発見から始まったこの10年間にわたる超弦理論の革命は一段落した感がありますが，弦理論は現在も引き続き着実な進展を遂げています．なかでも，超弦理論を現実の世界に適用するためには避けて通れない「モジュライの固定」の問題を解決する可能性が出てきたことはこの1–2年間の大きな発展です[編注]．こうした発展の結果，超弦理論には険しい乱雑なポテンシャルエネルギーが存在することが分かり，その様子は山脈を俯瞰しているイメージから弦理論のランドスケープと呼ばれています．乱雑なポテンシャルエネルギーには極めて多数の極値が存在しその各々が超弦理論の可能な真空に対応しています．これらの真空は離散的ではあるが数が極めて多いといった意味でDiscretuum（連続無限を意味するContinuumをもじった造語）と呼ばれています．

Discretuumに属する各々の真空を調べると，そのほとんどすべてはゲージ群や物質場の内容さらに宇宙項の大きさなどが我々が住む世界とは全く異なっており，我々の住む宇宙が弦理論の解として実現される確率が非常に低いこと（10^{-100}程度？）が示唆されます．このような状況は，弦理論で許される極めて多くの世界の中で現在我々が住んでいる世界を選び出すことができるだろうかという難しい問題を提起しています．可能な考え方としては

- 「現在の弦理論の分析が不十分で見過ごされている条件があり，これによって可能な真空が一意に定まり我々の住む世界が得られる」

というのが最も楽観的なものです．しかし，こうした条件が隠されている可能性は今のところ見当たりません．
二つ目の可能性としては

- 「超弦理論はこれ以上可能な真空の候補をしぼりきれない．我々が住んでいる真空（宇宙）では高度に知性の発達した生物が存在する稀な環境が整ったため，物理学が発達し自分たちの宇宙の起源を追求している．しかし，我々以外の世界では知性を持った生物が生まれる可能性が低く，自分たちの宇宙の起源を問う主体が存在しない．従って我々が10^{-100}程度の確率でしか存在しない世界に住んでいても不思議ではない」．

この第二の立場がいわゆる**人間原理**（Anthropic principle）と呼ばれるもので，我々の住む世界において極めて確率の低い状況が実現されている場合，人間（我々）が存在すること自体にその原因を求めるものです．

人間原理はもともと微細構造定数などの物理学の定数が少し変化したときに私たちの世界にどの

編集部注）本論説は，最初本誌2005年4月号特集「量子重力理論最前線」に掲載された．（⇒巻頭初出一覧．）

ような変化が生じるかをダイソンが考察したことに起源を持っています．ダイソンは微細構造定数が変化すると種々の原子核の束縛エネルギーが変化し，宇宙初期や星の内部で生成される元素の成分比に大きな影響が現れる．また水の融点や沸点も変化し地球のように生命を育む惑星の存在が難しくなることを指摘しました．私たちの周りの世界の様子が大きく変化してしまわないためには，物理学の定数の値が現在の値からほとんど変化できないことが示されています．

人間原理がよく持ち出されるのはいわゆる宇宙項に関連した問題で，現在観測されている宇宙項が（自然な大きさを1とするとき）10^{-120} 程度の異常に小さな値しか持たないことの説明に使われます．宇宙項がオーダー1の大きさであった場合，その符号が正であれば宇宙はビッグバンで誕生した後，爆発的に膨張を続け星や銀河が存在しない空っぽの空間に広がってしまう．あるいは宇宙項の符号が負であれば，ビッグバンで広がり始めた宇宙はすぐに収縮に転じ一点につぶれてしまう．こうした可能性を避け，我々の住む宇宙のように十分に広い空間の中に数多くの星や銀河が存在するためには宇宙項が 10^{-120} 程度の大きさに押さえられていることが必要です．現在，10^{-120} の大きさの宇宙項を説明できる理論は存在しません．

超弦理論のランドスケープから得られる真空のほとんどはオーダー1の大きな宇宙項を持っています．また，高エネルギー実験や現象論の研究に決定的な超対称性の破れのスケールもオーダー1となる可能性が高く，加速器実験による超対称性の検出が極めて難しくなります．

こうしたランドスケープの予言をどう捉えるかは超弦理論の研究者の間でも極めて流動的な状態にあり見解の一致が得られていません．人間原理の立場は科学的な説明や予言の放棄に近いものがあり，また「神が我々の宇宙を選んだ」といった極論まであってこれに反発する研究者は多いと思います．

本稿では超弦理論におけるモジュライ問題という困難はどういうものであったのか，そしてどのようにしてモジュライ問題が解決できるか．また，その結果現れたランドスケープ的観点とはどういう考え方であるかを簡単に解説したいと思います．

2. 超弦理論とモジュライの問題

ご存知のように弦理論は，物質の基本的な構成要素は1次元的な弦であると考える理論です．短い弦が振動しながら空間の一点にとどまっているのを遠くから眺めれば，いろいろなエネルギーを持った粒子がその点にいるように見えます．そのため，弦理論は沢山の種類の粒子を統一的に記述することができます．

弦理論には閉じた弦と開いた弦の2種類があり，それぞれの基底状態にはスピンが2で質量がゼロの粒子とスピンが1で質量がゼロの粒子が現れます．これらがちょうど重力子（アインシュタインの一般相対論が予言する重力波を運ぶ粒子）とゲージ粒子（ゲージ理論の基本粒子）に対応します．このため弦理論は一般相対論とゲージ理論を拡張した理論になっています．

超弦理論はボソンとフェルミオンを入れ替える超対称性（supersymmetry）を加えて改善した理論で，超重力理論（超対称性を加味した一般相対論）と超対称ゲージ理論の拡張になっています．超弦理論で特に重要なのは，理論に現れるいわゆるアノマリー（古典的な理論に存在する対称性が量子効果で破れる現象）が重力理論のセクターとゲージ理論のセクターの間で相殺しあって数学的に矛盾のない理論ができることで，この発見によって初めて重力理論とゲージ理論の統一が不可避になったことです．

このように，弦理論は理論の整合性のための厳しい条件がありこれが可能な時空やゲージ対称性を決定します．まず，理論の共形不変性から時空の次元は10次元に制限されます．またヘテロティック弦理論と呼ばれる弦理論のバージョンではゲージ群が $E_8 \times E_8$ と $SO(32)$ に制限されます．弦理論には他にタイプI，タイプIIA，タイプIIBの

計5つのバージョンがありましたが，90年代半ばからの発展によりこれらの弦理論は実はより基本的な理論，M理論を異なる領域で見たものにすぎず本質的にはただ一つの理論が存在することが分かってきました．

10次元から出発して4次元の物理を記述するには，残りの6次元は非常に小さなサイズの曲がった空間になっていると考えます．これを弦理論のコンパクト化と呼びます．コンパクト化された6次元の空間は通常の現象では見ることができず，このため我々の住んでいる時空は日常生活においては4次元に見えます．

さて，コンパクト化される6次元の空間は素粒子の内部空間と考えることができますが，理論の対称性を保つために特別な幾何学的性質を持つことが要求されます．即ち微分幾何学でリッチテンソルと呼ばれる量 R_{IJ} がゼロになる（リッチ平坦となる）

$$R_{IJ}=0 \tag{1}$$

が必要です．6次元空間でリッチ平坦な空間 $R_{IJ}=0\,(I,J=1,\cdots,6)$ の典型的なものがカラビ–ヤウ多様体です．

カラビ–ヤウ多様体は複素多様体の構造を持つので複素の添字 $i,j=1,2,3$ を用いて議論するのが適切です．カラビ–ヤウ多様体の計量は (1,1) 型 $G_{i\bar{j}}$ で計量から閉じた (1,1) 形式，ケーラー形式

$$\omega=\sqrt{-1}G_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^{\bar{j}} \tag{2}$$

が得られます．また，リッチテンソルが消えることから，至る所ゼロにならない正則な3–形式 Ω_{klm} が存在することが分かります．

さてカラビ–ヤウ多様体のモジュライと呼ばれるものを考えましょう．モジュライとは一般に考察する幾何学的対象が孤立したものではなくその特徴を保ったまま連続的に変形させることが可能なときに，その変化を記述するパラメーターのことを意味します．カラビ–ヤウ多様体 K 上に計量 $G_{IJ}(y)$ が与えられたとします．y は K の座標です．今，計量が $G_{IJ}+g_{IJ}$ に変化したとしましょう．この新しい計量が再びリッチ平坦となり新しいカラビ–ヤウ多様体の計量を与えると仮定します．新しい計量についてリッチテンソルを計算し変化分 g_{IJ} について1次までとると

$$\triangle_6\, g_{IJ}(y)=0 \tag{3}$$

が得られます．ここで $\triangle_6$ は元の計量 $G_{IJ}(y)$ で定まる6次元空間のラプラシアンです．従って，カラビ–ヤウ条件を保つ計量の変形はラプラシアンのゼロ固有値の固有関数で与えられます．

一般に，$-\triangle_6$ はゼロないし正の様々な固有値を持ちます．固有値を m_α^2，固有関数を f_{IJ}^α と書くと

$$-\triangle_6\, f_{IJ}^\alpha(y)={m_\alpha}^2 f_{IJ}^\alpha(y),\quad \alpha=1,2,\cdots \tag{4}$$

となります．

計量の変化分 g_{IJ} を添字が (1,1) 型のもの $g_{i\bar{j}}$ と (2,0) 型のもの g_{ij}（あるいは (0,2) 型 $g_{\bar{i}\bar{j}}$ のもの）とに分けて考えましょう．一般にケーラー多様体上の計量は (1,1) 型の構造を持ち $g_{i\bar{j}}$ はこの形を保った変形を与えます．これをケーラー構造の変形と呼びます．ケーラー構造の変形は方程式

$$\triangle_6\,\omega_{i\bar{j}}(y)=0 \tag{5}$$

の解，すなわち調和 (1,1) 形式で記述されます．調和 (1,1) 形式の数は多様体 K のホッジ数 $h_{1,1}$ で与えられます．

一方，(2,0) 型の計量の変形 g_{ij} は複素多様体としての複素構造の変形を意味します．Ω の複素共役 $\overline{\Omega}$ を用いて

$$g_{i\bar{l}\bar{m}}\equiv g_{ij}G^{j\bar{k}}\overline{\Omega}_{\bar{k}\bar{l}\bar{m}} \tag{6}$$

と表すと，(1,2) 型の微分形式が得られます．従って複素構造の変形は調和 (1,2) 形式で記述されホッジ数 $h_{1,2}=h_{2,1}$ の数だけ変形の自由度が存在します．

このようにカラビ–ヤウ多様体はケーラーパラメーターと複素構造の変形のパラメーターの2種類の変形の自由度，すなわちモジュライを持っており，それぞれ多様体の大きさを変える自由度（ケーラー変形）と形を変える自由度（複素構造の変形）に対応します．

カラビ–ヤウ多様体 K の 4–サイクルの基底

$C_a\,(a=1,\cdots,h_{1,1})$ を調和 (1,1) 形式 $\omega^a \equiv \omega_{i\bar{j}}^{\ a} dz^i \wedge dz^{\bar{j}}\,(a=1,\cdots,h_{1,1})$ に双対になるように選びましょう．ケーラー形式 ω と重力場のパートナーの 4 階反対称テンソル場 C を組み合わせて $*C+\sqrt{-1}\,\omega$ を作りこれを

$$*C+\sqrt{-1}\,\omega=\sum_{a=1}^{h_{1,1}} t_a\ \omega^{\ a} \qquad (7)$$

のように展開します（$*$ はホッジ双対を表す）．すると展開係数 t_a は

$$t_a=\int_{C_a}(C+\sqrt{-1}\ *\omega) \qquad (8)$$

で与えられます．これらがケーラーモジュライのパラメーターを表します．

また，3–サイクルの基底を $A_a\,(a=0,1,\cdots,h_{1,2})$, $B_a\,(a=0,1,\cdots,h_{1,2})$ の交叉数が $A_a\cap B_b=\delta_{ab}$, $A_a\cap A_b=B_a\cap B_b=0$ を満たすようにとります．このとき，複素構造の変形のモジュライのパラメーターとして

$$z_a=\int_{A_a}\Omega, \qquad a=1,\cdots,h_{1,2} \qquad (9)$$

がとれることが知られています．このとき，Ω の B サイクルに関する積分は

$$\frac{\partial F}{\partial z_a}=\int_{B_a}\Omega, \qquad a=1,\cdots,h_{1,2} \quad (10)$$

と表されます．F は z_a の正則関数でプレポテンシャルと呼ばれます．

カラビ–ヤウ・コンパクト化の下で10次元理論における場は6次元ラプラシアンの固有関数を使って

$$f_{IJ}(x,y)=\sum_\alpha \phi^\alpha(x) f_{IJ}^\alpha(y) \qquad (11)$$

のように展開されます．すると 10 次元の波動方程式は 4 次元の場の方程式

$$\triangle_{10} f_{IJ}(x,y)=(\triangle_4+\triangle_6)\sum_\alpha \phi^\alpha(x) f_{IJ}^\alpha(y)=0$$
$$\Longrightarrow (\triangle_4-m_\alpha^2)\phi^\alpha(x)=0 \qquad (12)$$

に帰着します．従って 6 次元ラプラシアンの固有値 m_α^2 に対応して 4 次元空間で質量 m_α のスカラー場 ϕ^α が現れます．特に多様体のモジュライに対応するスカラー場は質量がゼロになり，質量を持たないスカラー粒子，モジュライ粒子が 4 次元の理論に現れます．これらモジュライ場の真空期待値が上で定義したパラメーター $\{t_a, z_a\}$ に対応します（ラプラシアンのゼロでない固有値 m_α は空間 K のサイズの逆 2 乗に比例して大きくなるため，対応するスカラー粒子は非常に重くなりその存在を無視することができます）．

さて，上に述べたモジュライ粒子は計量の自由度の一部のため，すべての粒子と普遍的に結合します．また質量がゼロですから距離の逆自乗で減衰する力を媒介します．これは重力，電磁相互作用，強い相互作用以外の「第五の力」となります．このような力の有無は厳しく実験的にチェックされており，その存在は否定されています．そこで「如何にしてこれらモジュライ場に十分大きな質量を与えることにより実験事実との矛盾を解消するか」というのが超弦理論におけるモジュライ問題です．

3. モジュライの固定

カラビ–ヤウ・コンパクト化に伴って生じるモジュライ場は現象論的には望まれないものです．何らかの理由でモジュライ場 $\{t_a, z_a\}$ に依存したポテンシャルエネルギー $V(t_a, \bar{t}_{\bar{a}}, z_a, \bar{z}_{\bar{a}})$ が生じれば，ポテンシャルの極値でモジュライ粒子は V の 2 階微分（ヘシアン）で定まる質量を持つことになります．このようにしてモジュライ粒子に充分大きな質量が与えられれば，実験事実との矛盾はなくなるわけです．さて，ポテンシャルは一般的には種々の量子補正を受けるので，量子補正を考慮しないときに粒子が質量ゼロ（ポテンシャルがゼロ）だったとしても実際に観測される質量がノンゼロになる可能性があります．しかし，超弦理論のように超対称な理論を考えている場合は可能な量子補正が厳しく制限され，ポテンシャルはなかなか生じてくれません．これを克服するために RR フラックスと呼ばれる特別な量がカラビ–ヤウ多様体中に存在する場合やブレーンがサイク

ルに巻き付く非摂動的な効果を考えます．

これをもう少し詳しく見てみましょう．まず超対称性をもった4次元の重力理論であるという条件から，可能なポテンシャルは必ず

$$V = e^{\mathcal{K}}(g^{a\bar{b}}D_a W D_{\bar{b}}\overline{W} - 3W\overline{W}) \qquad (13)$$

という形になることが知られています．ここで W は t_a, z_a に正則に依存する関数でスーパーポテンシャルと呼ばれ，曲率がモジュライ空間のケーラー形式であるような線束 L の切断になっています．$\mathcal{K}$ はモジュライ空間のケーラーポテンシャルで，$D_a = \partial_a + (\partial_a \mathcal{K})$ は L の共変微分です．正則な切断は稀ですから，まずそのことが量子補正に強い制限を与えます．また，正則な関数は極での漸近形を与えると全域で決まるので，逆にこのことがスーパーポテンシャルを厳密に扱うことを可能にしています．

では，どのような機構でモジュライ空間上にスーパーポテンシャルが生じうるでしょうか．この進展を切り開いた Kachru *et al.*[1] に従って type IIB 弦の場合を考察することにしましょう．まず，type IIB 弦には2種類の2–形式場 B_1, B_2 が含まれます．この場は

$$B_l \to B_l + d\Lambda_l, \quad l = 1, 2 \qquad (14)$$

（Λ_l は任意の1形式）というゲージ変換を受けるため，ゲージ不変な量は3–形式 $H_l = dB_l$ になります．今，カラビ–ヤウ多様体内部の3–サイクルにこの3–形式場のフラックスを通すことを考えます．磁束を無理に狭いところに束ねるにはエネルギーが必要なように，3–形式場のフラックスを導入するとカラビ–ヤウの形に依存したポテンシャルが生じます．3–サイクルから定まったモジュライは複素構造モジュライ z_a であったことから，これによって z_a に依存したスーパーポテンシャルが生じ，その表式は

$$W(z_a) = \int_K (H_1 + \tau H_2) \wedge \Omega = \sum_a N_a z_a - \sum_a M_a \frac{\partial F}{\partial z_a} \qquad (15)$$

で与えられます（τ は type IIB 理論の結合定数）．ここで

$$M_a = \textstyle\int_{A_a}(H_1 + \tau H_2), \quad N_a = \textstyle\int_{B_a}(H_1 + \tau H_2) \qquad (16)$$

はそれぞれサイクル A_a, B_a を貫く H_l のフラックスです．このようにして，複素構造モジュライに対しては非常に一般的なスーパーポテンシャルを導入できます．このポテンシャルの極値として定まる真空を **flux vacua**（フラックスを持つ真空）と呼んでいます．

では，ケーラーモジュライのほうはどのようにして固定されるでしょうか？ 複素構造のモジュライの場合と同様に2–形式のフラックスを導入することができればスーパーポテンシャルが生じるでしょうが，残念ながら type IIB 弦理論にはそのような場はありません．よって，真に量子力学的な効果が必要です．さて，ケーラーモジュライの実部は4–形式の積分 $\mathrm{Re}\, t_a = \int_{C_a} C$ で与えられていたわけですが，理論を経路積分形式で定式化するとこの項は必ず指数関数の肩に乗って

$$e^{i\int_{C_a} C} \qquad (17)$$

という形になることが分かります．よって $\mathrm{Re}\, t_a$ を 2π だけシフトしても影響はでません．そのため，ケーラーモジュライにスーパーポテンシャルが生じたとしても，それは t_a の勝手な正則な関数ではあり得ず，$W(e^{it_1}, e^{it_2}, \cdots)$ という形をとるはずです．ここでケーラーモジュライの虚部に着目してみると

$$|e^{it_a}| = e^{-\int_{C_a} *\omega} = e^{-(C_a\ \text{の体積})} \qquad (18)$$

となっています．作用が S の古典配位が経路積分形式では e^{-S} だけ寄与することを思い出すと，この寄与は4–サイクル C_a に4次元的な物体が巻き付くことによって生じうるとわかります．さて，実際 type IIB 弦理論には時間空間あわせて4次元の広がりをもった膜状のソリトン（D3 ブレーン）が存在することが知られていますから，ちょうどこのようなスーパーポテンシャルが生じうるということがわかります．詳細に調べると，算術

種数が 1 であるような因子に巻いた D3 ブレーンでなければスーパーポテンシャルに寄与できないのですが，適切なカラビ–ヤウをとれば算術種数が 1 の因子が充分にあり，すべてのケーラーモジュライに質量が生じることがわかっています．

4. ランドスケープ

以上のようにして，type IIB 超弦理論を適切なカラビ–ヤウ多様体 K にコンパクト化し，更に K の内部に 3–形式のフラックスを導入すれば，すべてのモジュライ粒子に質量を与えられることが判りました．このタイプの真空がどれぐらい存在するかを推定してみましょう．コンパクト化に使うカラビ–ヤウ多様体を 1 つ固定すると，典型的には 3–サイクルは 100 ～ 200 個のオーダーで存在します．ここで，それぞれの 3–サイクルにどれだけの H_1, H_2 のフラックスを通すかの自由度があります．理論の整合性のために

$$\int H_1 \wedge H_2 \leq K \text{ の幾何学で定まる定数} \tag{19}$$

が要求されます（タドポール条件）．右辺は典型的には 1000 ～ 5000 のオーダーになるので，荒く数えてフラックスの選び方だけで

$$10^{100} \sim 10^{200}$$

通り程度の可能性があります．更にフラックスを決めてポテンシャルを極小化する際に 1 つ以上真空がある可能性があります．

フラックスを導入しないと，スカラー場は任意の連続的な値をとり得ました．フラックスを導入することでモジュライ空間上にスーパーポテンシャル $W(z_a)$ が生じ真空は離散的になるものの，極値におけるスカラー場の期待値はフラックスに応じた 10^{100} 程度の大量の可能性があることになります．この状況を **Discretuum** と呼ぶことにします．また，複雑なポテンシャルの底に沢山の真空が存在する状況を，険しい山脈地帯を俯瞰している状況になぞらえランドスケープと呼びます．兎に角，10^{100} もの真空を 1 つずつ虱潰しに調べるのは不可能なので，ランドスケープ全体としての性質を捉えなければなりません．このような，数多くの真空の統計的な取扱いは Douglas によって提唱されました[2)]．

一例として，K のトポロジーを固定し，フラックスが K の交叉形式に対して不変なガウス分布をしているとしたとき，複素構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{complex}}(K)$ 上に真空がどのように分布するかを調べてみましょう．超対称性を保つ真空はスーパーポテンシャル W の共変微分がゼロ，すなわち

$$D_a W = 0 \tag{20}$$

という条件で与えられます．W は式 (15) で与えられフラックスについて線形でしたから，W 自身ガウス分布をし，分散は

$$\langle W(w)W(z)\rangle = 0, \tag{21}$$

$$\langle W(w)^* W(z)^*\rangle = 0, \tag{22}$$

$$\langle W(w)W(z)^*\rangle \propto \mathrm{Im} \sum_a w_a \left(\frac{\partial F}{\partial z_a}\right)^* \tag{23}$$

$$= e^{-\mathcal{K}(w,\bar{z})} \tag{24}$$

で与えられます．分散 (24) は $\langle W(w)W(z)^*\rangle$ が $\mathcal{M}_{\text{complex}} \times \mathcal{M}^*_{\text{complex}}$ 上の $L \otimes L^*$ の切断でなければならないという点から非常に自然なものです．

この設定では，真空の分布関数は

$$\rho(z) = \langle \delta(D_a W)\delta(D_{\bar{b}} W^*) \times \left|\det\begin{pmatrix} \partial_a D_b W & \partial_a D_{\bar{b}} W^* \\ \partial_{\bar{a}} D_b W & \partial_{\bar{a}} D_{\bar{b}} W^* \end{pmatrix}\right|\rangle \tag{25}$$

で与えられます．ここで絶対値記号内の行列式は各真空を重み $+1$ で数えるためのヤコビアンです．残念ながらこれを直接計算するのは困難なため，絶対値記号をはずした

$$\tilde{\rho}(z) = \langle \delta(D_a W)\delta(D_{\bar{b}} W^*) \times \det\begin{pmatrix} \partial_a D_b W & \partial_a D_{\bar{b}} W^* \\ \partial_{\bar{a}} D_b W & \partial_{\bar{a}} D_{\bar{b}} W^* \end{pmatrix}\rangle \tag{26}$$

を考えましょう．これは各真空を適切に重み ± 1 を付けて数えることに相当します．この式は，ガウス分布に $D_a W = 0$ の拘束を課して行列式の期

待値を計算するだけですから，それほど難しくなく計算できて，

$$\tilde{\rho}(z)\prod_a dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{a}} = \det \frac{1}{2\pi}(R^a_b + \delta^a_b \omega_{\mathcal{M}}) \quad (27)$$

となります．ここで R^a_b はモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の曲率 2–形式を $U(n)$ で表したもので，$\omega_{\mathcal{M}}$ はモジュライ空間のケーラー形式です．この結果は，$\mathcal{M}$ がコンパクトで滑らかであれば期待された結果です．なぜなら，D_aW は $TK \otimes L$ の切断ですから，そのゼロ点の符号付き個数はそのバンドルのオイラー数

$$\int_{\mathcal{M}} e(TK \otimes L) \quad (28)$$

で与えられるはずです．(27) の右辺はまさにこのオイラー類の曲率による表示になっています．これは，1 つのスーパーポテンシャル W を選んだときに成立する事実ですが，(27) は，$\mathcal{M}$ がノンコンパクトで特異点を持つ場合でも，W のアンサンブルを考えることでゼロ点の分布を与える式として拡張できることを示しています．この場合，(27) は，$\mathcal{M}$ 内の滑らかな点では R^a_b は小さく真空は $\mathcal{M}$ の体積に従って一様に分布するが，特異点など曲率の大きいところに近づくと $\mathcal{M}$ の体積形式に比べて真空は非常に沢山存在するということを意味します．

5. 終わりに

ここまで議論してきたようなランドスケープ的描像，また真空の分布式 (27) を用いて，素粒子の現象論や宇宙論について理解を進めることができるでしょうか？

最も重要な宇宙項の問題について見てみると，まず超対称性を保つ真空 (20) ではポテンシャルエネルギーは

$$V = -3e^{\mathcal{K}} W\overline{W} \equiv \Lambda < 0 \quad (29)$$

となり，宇宙項 Λ は負の値をとることが分かります．負の宇宙項を持つアインシュタイン方程式の解は，反ド・ジッター空間と呼ばれるものになります．一般に超弦理論からは反ド・ジッター空間ないしはミンコフスキー空間（$\Lambda = 0$）のみが得られることが知られており，観測に見られるような（ごく小さいが）正の値の宇宙項を持った空間を得ることは難しいとされています．Kachru *et. al.*[1] のモデルでは，まずモジュライを超対称性を持つ真空に固定することから反ド・ジッター空間が得られ，次に反 3 ブレーンと呼ばれるものを導入して超対称性を破ることによりド・ジッター空間を構成しています．もしこのようなシナリオがよいとすると，flux vacuum を用いてまず負で大きな宇宙項が得られ，次に超対称性の破れによりこれをちょうど打ち消すだけの正のエネルギー密度が生成されて，最終的に小さな宇宙項を持つ世界が作られることになります．このようにうまく正，負のエネルギーが互いに打ち消すと仮定するのは虫がよい感じがしますが，このシナリオでは小さな正の宇宙項を作る代わりに，大きな正のエネルギー密度を作り出すことが必要とされます．一般に超対称性が破れると大きな正のエネルギー密度が生成されると考えられるため，不自然でない仮定とも思われます．

Flux vacua は従来質量ゼロに留まっていたモジュライ場に質量を与え弦理論の可能な真空を連続無限個から有限個に減らしました．これは非常に重要な進展です．有限個と言ってもまだ非常に数が多いですが，近い将来人間原理に訴えることなく更に真空の数を減らす機構が発見されることを期待しましょう．超弦理論はまだまだ多くの奇跡を演じる可能性を秘めています．

参考文献

1) S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde and S. Trivedy, "De Sitter Vacua in String Theory", *Phys. Rev.* **D68** (2003) 046005, hep-th/0301240
2) M.R. Douglas, "The Statistics of String/M Theory Vacua", *JHEP* **0305** (2003) 046, hep-th/0303194

（えぐち・とおる，京都大学基礎物理学研究所）
（たちかわ・ゆうじ，プリンストン高等研究所）

II. 超弦理論からの展開

AdS/CFT対応とホログラフィー

福間 将文

1. はじめに

超弦理論は量子重力も含む統一理論として最有力の候補であるが，これまでは摂動論的な側面の進展が主であった．最近になり，D ブレーンを通じて非摂動効果の理解が急速に進んできたが，超弦理論を構成的に定式化することはまだできていない．こうした定式化においては，果たして何が基本的な力学変数なのかをしっかりと同定する必要がある．ホログラフィー原理は，この問に対して重要な足がかりになるものと考えられている．本稿では，ホログラフィーの概念の出所，超弦理論における例，今後の展望，などについて議論する．

2. ブラックホールの熱力学

本節ではまず，ブラックホールが，温度，エントロピーなどの熱力学的量を持つことを示す[1]．以下，$\hbar = c = k_{\rm B}$(Boltzmann 定数) $= 1$ の自然単位系をとる．このとき 4 次元時空の Newton 定数 G は [長さ]^2 の次元を持ち，$l_{\rm P} \equiv \sqrt{G} \sim 10^{-33}{\rm cm} \sim (10^{19}{\rm GeV})^{-1}$ は，Planck 長さと呼ばれる．

ブラックホールの内部は因果的に物質が外に逃げられなくなる領域であるが，その領域と外部とを分ける境界のことを**事象の地平線**（あるいはたんに**ホライズン**）と言う．例えば，質量 M の Schwarzschild ブラックホールは，ホライズンの外側で，$ds^2 = -(1-2GM/r)dt^2 + (1-2GM/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$ の線素を持つが，半径 $r_0(M) \equiv 2GM$ の球面がホライズンであり，その面積は

$$A = 4\pi r_0^2 = 16\pi G^2 M^2 \tag{1}$$

である．

今，この Schwarzschild ブラックホールに，何らかの物質を静かに投下してみる．するとホライズンの外側の物質系にとっては，情報の一部がホライズンに隠れてしまうので，エントロピーは減少する（$\Delta S_{物質} < 0$）．これは一見エントロピー増大の法則に反するように思える．一方，ブラックホールの質量は増加するはずであるから ($\Delta M > 0$)，式 (1) より，ホライズンの面積も増大することが分かる（$\Delta A > 0$）．実は，このことは，物質のエネルギーの正定値性や因果性に関する適当な仮定の下で一般的に言えて，『任意のブラックホールに対する任意の古典的プロセスにおいて，ホライズンの面積は必ず増大する』ことが証明できる (Hawkingの面積則)．そこで Bekenstein は，ブラックホールにもエントロピーを割り当てることで上の問題を解決することを提案した．具体的には，ブラックホールがホライズンの面積に比例したエントロピーを持つとし ($S_{\rm BH} \propto A$)，物質系とブラックホールを合わせた全エントロピー $S_{全体} \equiv S_{物質} + S_{\rm BH}$ が，どんな物理的過程に対しても時間とともに単調増加する

べきだと主張したのである（$\Delta S_{全体} \geq 0$）．これを**一般化された熱力学第2法則**（GSL: Generalized Second Law）と言う．

$S_{\rm BH}$ とホライズンの面積の比例係数は Hawking により決定された．一般に，曲がった時空の各点には表面重力（surface gravity）という量に比例した温度を割り当てることができるが，特に Schwarzschild ブラックホールの場合，その周囲は温度 $T = 1/8\pi GM$ の熱浴に接している系と同等になる．これから，$S_{\rm BH}$ とホライズンの面積 A との比例係数が，熱力学第1法則と式 (1) を用いて次のように求まる：$dM = T\,dS_{\rm BH} = (8\pi GM)^{-1}\,(dS_{\rm BH}/dA)\,(dA/dM)\,dM = 4G\,(dS_{\rm BH}/dA)\,dM$．つまり，面積 A のホライズンを持つブラックホールは，

$$S_{\rm BH} = \frac{1}{4G}A \qquad (2)$$

のエントロピーを持つ．これを **Bekenstein–Hawking エントロピー**と言う．

同様の計算は一般の D 次元時空でも行うことができ，Einstein–Hilbert 作用を $\boldsymbol{S}_D = (1/16\pi G_D) \int d^D x \sqrt{-g}\big(R + \cdots\big)$ と書いたとき，式 (2) は $(D-2)$ 次元「面積」A_{D-2} を用いて $S_{\rm BH} = \big(1/4G_D\big)A_{D-2}$ と書かれる．

3. エントロピーの上限とホログラフィー

体積 V の空間的領域を考え，その内部のエネルギーを E とする．このとき，その領域内のエントロピー $S(E,V)$ は，重力のことを一切考慮しなければ，体積に比例した示量性の量である．これは，エネルギー一定の条件下で領域内の自由度を数え上げた場合に，$[\text{総自由度}] \sim [\text{各点ごとの有効自由度}]^V$ となることから，$S \equiv \log\big([\text{総自由度}]\big) \propto V$ として，統計力学的に理解される．

しかしながら，前節の GSL を用いると，重力の効果を取り入れた場合，すべての物質のエントロピーに示量的でない上限がつくことが導かれる[2)]．

以下，簡単のために，総エネルギー E の物質が半径 R の球面の内側に球対称に分布している場合を考える．これがまだブラックホールになっていないとすれば，その半径は Schwarzschild 半径 $R_0(E) = 2GE$ よりも大きくなければならない：$R > 2GE$．一方，ホライズン半径が R のブラックホールの質量は $M = R/2G$ であるので，この領域にはまだ $\Delta E \equiv M - E\ (>0)$ の物質を詰めることができる．そして領域内のエネルギーが M を超えたとき，この領域はホライズンの内側に入りブラックホールになる．このように，球対称な領域に殻状の物質を落とし続けて面積 $A = 4\pi R^2$ のブラックホールを作る過程を考え，過程の前後のエントロピーに対して GSL を適用してみる．まず，物質を詰める前は，$S_{(前)} = S_{領域内の物質} + S_{殻状の物質}$ であり，詰めた後はブラックホールしかないので，$S_{(後)} = (1/4G)A$ である．こうして，GSL より $S_{(前)} \leq S_{(後)}$ であることと $S_{殻状の物質} \geq 0$ を用いて，

$$S_{領域内の物質} \leq \frac{1}{4G}A \qquad (3)$$

が結論される．等号は，考えている領域がすでに面積 A のブラックホールになっていたときである．

この上限は，重力の効果を取り入れた場合に『物質場のエントロピーは示量的でなく境界の面積で抑えられる』ことを示している．統計力学的には最大のエントロピーとは基本的な力学的変数が作るヒルベルト空間の次元に対応する量であるから，これが局所場の場合の示量的な振舞いからずれるということは，重力の効果を正しく取り入れた場合に，局所場のゆらぎをすべて取り入れるのは数えすぎであることを示唆している．

この困難を回避する，drastic だが一番単純な解決法は，3次元領域のすべての自由度が2次元境界面上の自由度に対応付けられる，とするものである．重力理論におけるこうした『境界面上の情報から1次元高い領域の情報が再構築できる』とする原理を，光学のホログラフィーになぞらえて**ホログラフィー原理**と呼ぶ．また，不等式 (3) より，境界面上の基本的な力学的自由度は，1Planck 面積 $G = l_{\rm P}^2$（D 次元時空では 1Planck「面積」

G_D）あたり，1 自由度（1 bit）を超えないことが要求される．

実際，局所場の自由度をすべて足し合わせてしまうと矛盾が起きることが，次のような簡単な例で示すことができる．まず，3 次元空間内の物質が局所場で表されていると仮定し，体積 R^3 の部分領域に注目する．このとき，R が Planck 長さに対して十分大きいとして，短距離側に Planck 長さ l_P の紫外切断をおく．これは，考えている領域を体積 l_P^3 の小箱に分割し，各小箱に入れられるエネルギー ϵ の最大値を $1/l_\mathrm{P}$ とすることに対応する：$\epsilon \lesssim 1/l_\mathrm{P}$．実際これは各小箱がブラックホールにならないという条件：$l_\mathrm{P} \gtrsim \epsilon G = \epsilon l_\mathrm{P}^2$ にも適合している．さて今，この R^3/l_P^3 個の小箱に，上限のエネルギー $\epsilon_{\max} = 1/l_\mathrm{P}$ を詰めてみる．すると領域全体のエネルギーは $E \sim \epsilon_{\max} \times (R^3/l_\mathrm{P}^3) = (R/l_\mathrm{P}^2) \times (R/l_\mathrm{P})^2$ となり，今考えているスケール $R \gg l_\mathrm{P}$ では，領域自身がブラックホールになるエネルギー $R/G = R/l_\mathrm{P}^2$ を平気で超えてしまう．つまり，通常の局所場の紫外切断では，$\epsilon \sim 1/l_\mathrm{P}$ くらいまで場が励起しだすよりもずっと前に系はブラックホールになってしまう．

さて現在，量子重力まで含めてすべての相互作用を整合的に記述できるものとして超弦理論がある．もちろんこれが標準模型や宇宙の発展を正しく再現する理論であると確認されたわけではないが，物質場と重力場をほとんど同じ形式で扱えるという点で，他の理論とは違う特色を持っている．

これまでの超弦理論の定式化は主に摂動論によるものであるが，摂動的には「1Planck 面積あたり 1 自由度まで」というホログラフィー原理が成立している必要はまったくないように見える．しかしながら，系にエントロピーを与え続けたとき上限に達する前に弦の摂動論自体が破綻することが，Susskind らによって指摘されている．こうして，超弦理論においてホログラフィー的性質があからさまに見えるためには，少なくとも超弦理論が非摂動的に定式化されている必要があると考えられている．

4. エントロピーの上限に関する補足

超弦理論に関する議論を続ける前に，エントロピーの上限に関する補足を与えておく．

(2) や (3) を導いた議論では，漸近的に平坦な時空内の球対称に分布した物質場を仮定していたが，より複雑な時空やより複雑な形状の領域については，上のエントロピーの上限を満たさない例がいくらでも作れてしまう．このことは長く問題になっていたが，最近になって，エントロピーの上限に関する共変的で正しそうな statement が Bousso により与えられた[2]．これを説明するために，いくつかの概念を導入することから始める．まず，面積 A の空間的な 2 次元面 B（必ずしも閉じてなくてよい）を考え，この面から垂直に光を出すことを考える．このとき，各面素 ΔA に対して，光の進む方向は，面の外向きと内向きの 2 方向あるが，さらに未来に進むものだけでなく過去に進むものも考えてやれば，合計 4 方向ある．このうち，光の束の断面積が増大しない方向が少なくとも 2 つある．つまり，面から光が離れる向きに affine パラメーター λ を導入したとき，断面積の変化が $d\,\Delta A(\lambda)/d\lambda \leq 0$ となる方向が 2 つ以上ある．このうちの 1 つを固定したとき，光の束がなす軌跡の全体（4 次元時空の中で 3 次元的）を『B を境界とする lightsheet』と呼び，$L(B)$ と書く．なお，ある光の束が affine パラメーター $\lambda = \lambda_0$ のところで火点（caustic）や特異点を持ったときには，lightsheet 全体を $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ の領域に制限する

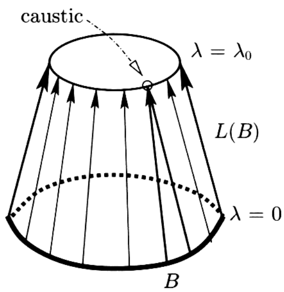


図 1　4 次元時空の中の lightsheet $L(B)$（すべて 1 次元落として書いている）．

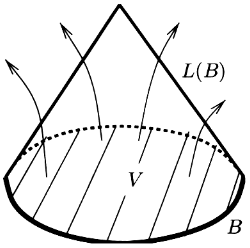


図 2　因果性より V 内の物質はすべて $L(B)$ を通過する（1 次元落として書いている）.

ものとする（図 1）.

Bousso の covariant entropy bound とは，面 B とその lightsheet $L(B)$ が与えられたとき，$L(B)$ 上のエントロピー $S\big(L(B)\big)$ は面 B の面積 $A(B)$ で必ず抑えられるというものである：

$$S\big(L(B)\big) \leq \frac{1}{4G}A(B). \qquad (4)$$

この上限にはこれまで深刻な反例がなく，かなり普遍的に成立するものと期待されている.

また，2 次面からなる 1 パラメーターの族 $\{B_s\}$ について，それらの lightsheet たちで時空 M 全体を覆えるとき（$M = \cup_s L(B_s)$），この族を『時空 M の screen–hypersurface』，そして個々の 2 次面 B_s を『screen』と言う．すべての情報はヌル測地線をたどることで常にこの上に射影できると考えられる.

なお，B が未来方向に lightsheet $L(B)$ を持つ閉じた面で，しかも $L(B)$ の唯一の境界になっているとき（先の球対称の例はこの条件を満たす），B で囲まれた空間的領域 V のすべての物質は因果性より必ず lightsheet $L(B)$ を通過する（図 2）．したがって，第 2 法則から $S(V) \leq S\big(L(B)\big) \leq (1/4G)A(B)$ となり，Bekenstein–Hawking の上限 $S(V) \leq (1/4G)A(B)$ が得られる.

5. AdS/CFT 対応と IR/UV 関係

超弦理論がホログラフィー的性質を持つかどうかは，先にも述べたとおり未解決の問題である．しかしながら最近になり，いくつかの状況証拠が得られてきた．本節では，これの代表的な例である **AdS/CFT 対応**を解説する．これは，短く言えば，『重力理論とゲージ理論の間の双対性』さらには『閉じた弦と開いた弦の間の双対性』である．まずいくつかの概念を導入することから議論を始める.

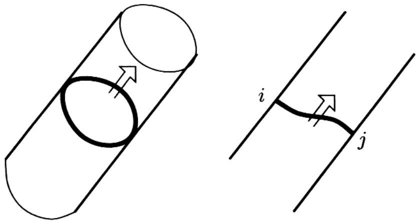


図 3　(a) 閉じた弦と (b) 開いた弦.

5.1　D ブレーン

超弦理論とは時空の超対称性を持つ弦理論のことで，登場する弦には『閉じた弦』と『開いた弦』がある（図 3）．弦の張力を T とすれば弦の典型的な拡がりのスケールは $l_s \sim 1/\sqrt{T}$ と書ける．したがって，l_s よりもずっと長い距離から見れば弦は点粒子として振る舞う．なお，振動すると弦に振動エネルギーが蓄えられるため，高い励起の振動モードほど重い質量を持った粒子として振る舞う．また時空の中での振動であるので，弦の各振動モードに対して振動の方向を表す量子数が割り当てられ，それは粒子のスピンに対応する．例えば，閉じた弦の最初の励起状態は 2 方向に振動するモードであるが，時空が 10 次元で超対称性を持つ場合にはこれが一番軽いモードとなり，しかも質量 0 となる*1)．このモードにはスピン 2 の重力子が含まれ，こうして，閉じた弦の低エネルギー理論は 10 次元超重力理論になることが分かる.

一方，開いた弦に対しては，さらに両端に量子数を持たせることができる（Chan–Paton 因子）．例えば，量子数 (i,j) $(i,j = 1,\cdots,N)$ を持った弦の第 1 励起状態はスピン 1 を持った $U(N)$ 群のベクトル粒子 $A_\mu^{ij}(x)$ として振る舞う．超弦理

*1)　基底状態（弦が振動していない状態）はタキオン粒子になるが，時空に超対称性を課した場合にはこれは物理的状態ではなくなり，理論から排除できる.

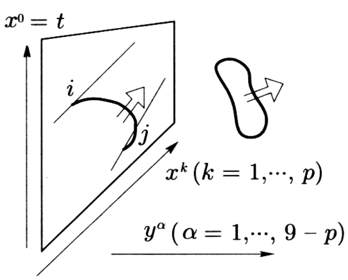


図 4　Dp ブレーンが掃く世界体積．10 次元時空の中では，$(9-p)$ 次元の直交した方向がある．開いた弦はほとんど $(p+1)$ 次元に住むが，閉じた弦は 10 次元の中を自由に運動できる．

論においてはこの第 1 励起状態が一番軽い物理的状態になり，しかも質量 0 になる．こうして，開いた弦の低エネルギー理論は 10 次元超対称ゲージ理論になる．

次に **D ブレーン**というものを説明する．これは超弦理論の摂動論の観点からはソリトンに対応するオブジェクトで，開いた弦の端点をその上に留めさせるものとして定義される．特にそれが空間的に p 次元に拡がっている場合に Dp ブレーンと呼ぶ（図 4）．

以前と同様に，開いた弦の両端には量子数を持たせることができるが，今回は移動できる方向がブレーンの掃く世界体積上に限定されてしまい，ゲージ理論としては，空間 p 次元，時間 1 次元の $(p+1)$ 次元ゲージ理論となる．これがどういう場合に超対称性を持つかについての細かい説明は省略するが，タイプ IIB 型超弦理論に対して N 枚の D3 ブレーンを置いた場合には，4 次元 $\mathcal{N}=4$（超対称荷が 4 個ある）$SU(N)$ 超対称ゲージ場が出現することが知られている．

一方，このブレーン自身は張力（p 次元体積に比例した質量を生む）を持っているため，その周りで時空は曲がってしまう．例えば，N 枚の D3 ブレーンを置いたときには，そのホライズンの近傍で 10 次元時空は，5 次元反ド・ジッター（AdS_5: Anti–de Sitter）時空と 5 次元球面 S^5 の直積（$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$）になることが確かめられる：

$$ds^2 = L^2\left[\frac{dr^2}{r^2} + r^2\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\Omega_5^2\right]. \quad (5)$$

ここで，x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は D3 ブレーンの世界体積の座標，$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}[-1, 1, 1, 1]$，$r$ はホライズンからの距離に比例したパラメーター，$d\Omega_5^2$ は単位 5 次元球面の線素である*2)．計算の詳細は一切省くが，N 枚の D3 ブレーンの張力が $N \times (l_s^4\, g_s)^{-1}$ であることを用いて Einstein 方程式を解けば，AdS 時空と S^5 の曲率半径 L が $L \sim (g_s N)^{1/4} l_s$ となることが分かる．ここで，g_s は弦同士の結合定数である．また，D3 ブレーン上に現れる低エネルギー理論を解析することで，4 次元ゲージ理論の結合定数 g_{YM} が g_s と $g_s \sim g_{\mathrm{YM}}^2$ の関係にあることが分かる．さらに，10 次元 Newton 定数が弦理論では $G_{10} \sim g_s^2 l_s^8$ と書かれるため，5 次元 Newton 定数はそれを S^5 の体積で割った $G_5 \sim G_{10}/L^5 \sim g_s^2 l_s^8/L^5$ となる．なお，コンパクト化により AdS_5 上の各 Kaluza–Klein モードには S^5 の等長変換群 $SO(6)$ の対称性が現れるが，これは 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性のいわゆる R 対称性，$SU(4) \simeq SO(6)$ に対応する．

今の場合の『AdS/CFT 対応』とは，大雑把に言って，この「AdS_5 を背景とする 5 次元重力理論」と「D3 ブレーン上の 4 次元ゲージ理論」が等価になっている，というものである．つまり，5 次元の AdS 重力理論を解析することで 4 次元超対称ゲージ理論の結果を導けるし，逆に，4 次元のゲージ理論の解析からそれを境界に持つ 5 次元重力理論が定まってしまう，というものである．この，『重力理論が，1 次元低い局所場の理論と等価になっている』という点が，まさにホログラフィー的なものになっている[3]．

AdS/CFT 対応のもっと正確な statement は後で述べることにして，この対応がとりあえず成立すべき領域を調べておこう．まず，超弦理論を低エネルギー有効理論で記述してよい領域は，AdS 空間の曲率半径が弦の拡がりに比べてずっと大きなと

*2)　この線素はホライズンの近傍を引き伸ばして得られるもので，$r \to \infty$ のときでも実はホライズンの近傍にとどまっている．

きである：$L \gg l_s$．これがさらに5次元Einstein重力で記述されるためには，L は5次元Planck長さ $(G_5)^{1/3}$ よりもずっと大きい必要がある．それぞれの条件は，$g_s N \sim g_{YM}^2 N \gg 1$, $N \gg 1$ と書き直すことができるので，結局，AdS重力理論とゲージ理論との対応が良くなる領域を4次元ゲージ理論の言葉で述べれば，ゲージ群が大きく（$N \gg 1$），さらに，いわゆる't Hooft coupling $g_{YM}^2 N$ が大きな強結合領域であることが分かる[4]．

5.2 AdS空間

一般に $(d+1)$ 次元AdS空間 AdS_{d+1} （またはそのEuclid版であるLobachevsky空間）は，$\boldsymbol{R}^{d+2} = \{(y^{-1}, y^\mu, y^d);\ \mu = 0, 1, \cdots, d-1\}$ の中の次で定まる部分空間として定義される：

$$-\left(y^{-1}\right)^2 + \eta_{\mu\nu} y^\mu y^\nu + \left(y^d\right)^2 = -L^2. \tag{6}$$

ここで AdS_{d+1} の符号がLorentzianであるかEuclideanであるかに応じて $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}[\mp 1, 1, \cdots, 1]$ と選ぶ．L はAdSの曲率半径と呼ばれる量であるが，これは長さのスケールを与えるだけで，空間自身はnoncompactである．また，AdS_{d+1} は $R = -d(d+1)/L^2$ の負定曲率空間で，宇宙定数 $\Lambda = -d(d-1)/2L^2$ を持つ．境界近傍の様子を見るには次の座標

$$z = \frac{L^2}{y^{-1} + y^d}, \quad x^\mu = \frac{1}{L} y^\mu z \quad (\mu = 0, 1, \cdots, d-1) \tag{7}$$

が便利で（前節の r は $r = L^2/z$ と書ける），このとき，計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(dy^{-1}\right)^2 + \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu + \left(dy^d\right)^2 \Big|_{\text{条件 (6)}} \\ &= \frac{L^2}{z^2}\left(dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu\right) \\ &\equiv \boldsymbol{G}_{MN}^{\mathrm{AdS}}(x, z)\, dX^M dX^N \\ &\qquad (X^M = (x^\mu, z)) \end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる．以下Euclid化したLobachevsky空間のみ考えることとし，領域 $z > 0$ の連結成分を考える．これは $(d+1)$ 次元球体 B^{d+1} と同じ位相を持ち，境界は $z = 0$ で与えられる．なお，一番簡単なLobachevsky空間は，次のPoincaré計量を持つ2次元 $(d = 1)$ 上半平面である：

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(dz^2 + dx^2\right) \quad (z > 0). \tag{9}$$

5.3 AdS/CFT対応

一般の次元におけるAdS/CFT対応は次のように述べることができる．まず，AdS_{d+1} 上のスカラー場 $\boldsymbol{\phi}(x, z)$ に対するEinstein–Hilbert作用 $\boldsymbol{S}_{d+1}[\boldsymbol{G}_{MN}^{\mathrm{AdS}}(x, z), \boldsymbol{\phi}(x, z)]$ を考え，その古典解を $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{cl}}(x, z)$ とする．このとき，AdS_{d+1} 内部での正則性より古典解が境界値 $\varphi(x) \equiv \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{cl}}(x, z = 0)$ だけから一意的に定まるとすると，この古典解を作用 $\boldsymbol{S}_{d+1}$ に代入して得られる「古典的作用」は $\varphi(x)$ のみの汎関数となる：

$$\boldsymbol{S}_{d+1}[\boldsymbol{G}_{MN}^{\mathrm{AdS}}(x, z), \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{cl}}(x, z)] \equiv S[\varphi(x)]. \tag{10}$$

AdS/CFT対応が主張することは，この古典的作用が，ある共形場理論（CFT: <u>C</u>onformal <u>F</u>ield <u>T</u>heory）の生成母関数になるというものである：

$$\exp\left(-S[\varphi(x)]\right) = \left\langle \exp \int d^d x\, \varphi(x) \mathcal{O}(x) \right\rangle_{\mathrm{CFT}}. \tag{11}$$

ここで $\mathcal{O}(x)$ は，$\varphi(x)$ をsourceとするCFTのスケーリング演算子である．

実際，先の例の4次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論は共形不変であることが知られている．また，重力理論におけるdilaton場 φ の古典解は定数で与えられ，境界上ではゲージ場の結合定数と同一視される（$e^\varphi \sim g_{YM}^2$）．

AdS/CFT対応の数学的背景は，AdS_{d+1} の等長変換群が境界（$\sim \boldsymbol{R}^d$）上の共形変換群 $SO(d, 2)$（Euclideanでは $SO(d+1, 1)$）と同型であることである．これは定義式 (6) から明らかであるが，計量 (8) についても，AdS_{d+1} 上の無限小一般座標変換 $\boldsymbol{\epsilon}^\mu(x, z) = \xi^\mu(x) + O(z^2)$, $\boldsymbol{\epsilon}^z(x, z) = z\, h(x) + O(z^3)$ が満たすKilling方程式 $\boldsymbol{\nabla}_M \boldsymbol{\epsilon}_N + \boldsymbol{\nabla}_N \boldsymbol{\epsilon}_M = 0$ が，境界 $z = 0$ 上で d 次元共形Killing方程式 $\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2\, h\, \eta_{\mu\nu} = (2/d)\,(\partial_\lambda \xi^\lambda)\, \eta_{\mu\nu}$ $(\xi_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}\, \xi^\nu)$ となることからも分かる．実際このことからAdS/CFT対応は次のようにして理解できる．まず作用 $\boldsymbol{S}_{d+1}$ はもともと一般座標

変換 $f\colon \mathrm{AdS}_{d+1} \to \mathrm{AdS}_{d+1}$ の下で不変なので，特に f が AdS_{d+1} の等長変換だったときには，古典的作用 $S[\varphi(x)]$ は境界上に引き起こされた共形変換 $\rho \equiv f|_{\partial(\mathrm{AdS}_{d+1})}$ の下で不変になる：$S[\rho^*\varphi(x)] = S[\varphi(x)]$（$\rho^*$ は ρ の引き戻し）．この式は，$\varphi(x)$ を局所的演算子 $\mathcal{O}(x)$ の source と見なしたときに，$\mathcal{O}(x)$ が共形場理論のスケーリング演算子になっているという解釈を与える：$\langle\, \rho^*\mathcal{O}(x_1)\cdots\rho^*\mathcal{O}(x_n)\,\rangle = \langle\, \mathcal{O}(x_1)\cdots\mathcal{O}(x_n)\,\rangle$．

5.4 IR/UV 関係

実際には，上の議論は幾つかの修正を要する．まず第一に，古典解を代入した Lagrangian 密度の $(d+1)$ 次元空間上の積分は $z=0$ 近傍で発散してしまう．したがって，古典的作用を定義するためには，ある $z_0\,(>0)$ を用いて領域を $z \geq z_0$ と制限する必要がある．これは，体積積分の発散を正則化するという意味で赤外正則化になっている．一方，境界上の場の理論として見た場合，共形対称性が成立するのは $z=0$ 上のみであるため，新しい境界 $z=z_0$ 上では共形対称性は失われてしまう．実は，次の段落で示すように，z_0 の導入は d 次元場の量子論としては紫外側の正則化になっている．z_0 のこうした二面的役割は **IR/UV 関係**と呼ばれる．また，スカラー場の重力への反作用を考えると，$(d+1)$ 次元空間内部では必ずしも AdS の計量になっていないため，一般的には漸近的に AdS の計量を持つ空間まで拡大して考察する必要がある．こうして，AdS/CFT 対応は，正則化 z_0 を導入した場合，次の形に一般化される：

「漸近的に AdS の赤外正則化された $(d+1)$ 次元重力理論」

⇔「紫外正則化された d 次元場の量子論」

さて，z_0 が d 次元場の量子論の紫外側の長さの単位を与えることは，次のようにして理解できる．まず，曲がった時空の中に source を 2 つおいたときの振幅が，2 点 X,Y の間の測地距離を $d(X,Y)$ として，おおよそ $\exp\bigl(-m\,d(X,Y)\bigr)$ で与えられることに注意する（図 5）．ここで m は質量に相当するパラメーターであり，簡単のため $m \gg L^{-1}$ を仮定した．

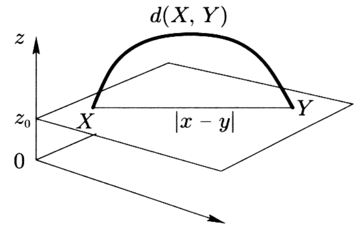


図 5　$(d+1)$ 次元空間内の測地線．

特に，2 点を $X=(x^\mu, z_0)$, $Y=(y^\mu, z_0)$ ととった場合には，z_0 が十分小さいとして計量が AdS であるとすると，簡単な計算により $d(X,Y) = 2\,L\log\Bigl[\Bigl(|x-y| + \sqrt{|x-y|^2+4z_0^2}\Bigr)/2z_0\Bigr]$ となることが分かる（$|x|^2 \equiv \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$）．これを代入すると

$$e^{-m\,d(X,Y)} \sim \left(\frac{2z_0}{|x-y|+\sqrt{|x-y|^2+4z_0^2}}\right)^{2mL} \tag{12}$$

となり，2 点の d 次元超曲面での距離 $|x-y|$ が z_0 に比べて十分大きいときには確かに共形不変な 2 点関数を与える：

$$\langle\, \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\,\rangle \sim \frac{1}{|x-y|^{2mL}} \quad \Bigl(|x-y| \gg z_0\Bigr). \tag{13}$$

逆にこのことは，z_0 が d 次元場の理論においてスケーリングが破綻する紫外側の長さであることを意味する*3)．

こうして，漸近的に AdS 的な一般の場合について z_0 をいろいろと動かすことで，d 次元場の理論の様々なスケールでの振舞いが分かることになり，これはくりこみ群としての一つの枠組みを与える．一方，$(d+1)$ 次元重力側から見た場合，このくりこみ群の流れを調べることは，スカラー場の重力場への反作用も考慮に入れて，1 次元低い境界上の値から空間内部の古典的配位を決めることに相当する．そこで現在，この枠組みは**ホログラフィー的く**

*3)　一般の mL について正確な計算をすると，式 (13) の右辺は，$1/|x-y|^{2\Delta}\Bigl(\Delta = d/2 + \sqrt{(d/2)^2+(mL)^2}\Bigr)$ となる．

りこみ群 (holographic renormalization group) と呼ばれている[5]).

6. AdS_5/CFT_4 対応におけるホログラフィー

さて,「ホログラフィー的」とは，空間的領域の内部がその境界で決まるという定性的性質だけでなく,「境界には単位 Planck 面積あたり 1bit までの情報しか入らない」という定量的性質まで意味していた．ところが AdS 空間自身は noncompact で境界の「面積」が発散してしまうため，このままでは重力側のエントロピーを有限に定義できない．そこで，前節の考察でやったように AdS 空間の境界をずらす正則化を行い，5 次元重力のエントロピーを Bekenstein–Hawking エントロピーで評価して，それが確かに 4 次元局所場理論のエントロピーになっているかを調べてみる．

そのためには，まず Lorentzian の符号の AdS_5 時空に戻り，計量を次のように書き直すのが便利である：

$$ds^2 = L^2\Big[-\Big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\Big)^2 dt^2 + \frac{4}{(1-r^2)^2}\big(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2\big)\Big]. \quad (14)$$

ここで，$t \in \boldsymbol{R}$, $0 \le r < 1$，また，Ω_3 は 3 次元単位球面の座標である．このとき，各時刻 t における timeslice は 4 次元球体 B^4 となり，その境界は $r=1$ の S^3 で与えられる．このままでは 3 次元境界の「面積」は発散するが，r の範囲を $0 \le r \le 1-\epsilon$ に制限する正則化を行うことで，新しい境界 $r = 1-\epsilon$ における 3 次元「面積」を $A_3(\epsilon) = \int_0^{1-\epsilon} d^3\Omega_3\big(4L^2r^2/(1-r^2)^2\big)^{3/2} \sim (L/\epsilon)^3$ と有限にできる(図 6)．ここで 5 次元 Newton 定数 G_5 が超弦理論から $g_s^2 l_s^8/L^5$ と計算されることを用いると，Bekenstein–Hawking エントロピー $S_{AdS_5} \equiv (1/4G_5)A_3(\epsilon)$ は $S_{AdS_5} \sim (1/g_s^2\epsilon^3)\cdot(L/l_s)^8$ となる．さらに先の関係式 $L = (g_s N)^{1/4} l_s$ を代入すれば，$S_{AdS_5} \sim N^2/\epsilon^3$ を得る．

一方，境界上では 4 次元 $SU(N)$ 超対称ゲージ理論が登場するはずであるが，登場する場はすべてゲージ群の随伴表現 ((N^2-1) 次元) に属するので，場の数は (N^2-1) に比例する．これが紫外正則化された ϵ^3 の体積の領域に 1 セットずついるので，3 次元境界上のエントロピーは $S_{CFT_4} \sim (N^2-1)/\epsilon^3$ となり，十分大きな N に対して確かに $S_{AdS_5} \propto S_{CFT_4}$ となっていることが分かる．比例係数も一致するはずであるが，ゲージ理論側の強結合領域での計算が難しく，まだ確かめられていない*4).

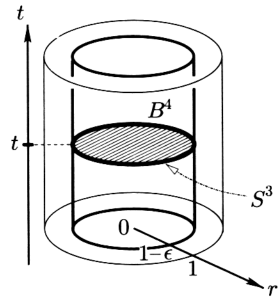


図 6 正則化後の 4 次元 timeslice B^4 とその境界 S^3 (1 次元落として書いている).

7. 結語

本稿では，古典重力から超弦理論にわたり『ホログラフィー原理』が見え隠れしている現状を概説した．

超弦理論の現在一番重要なテーマの一つは，理論を構成的に定式化することである．その際，ホログラフィー原理に関する考察が，**量子重力理論**

*4) この例のほかに有名なものとしては，D1–D5–KK 系というものがある．作り方は，まず，10 次元時空のうち空間 5 次元分を 5 次元トーラス T^5 にコンパクト化し，その上に N_5 枚の D5 ブレーンを巻きつける．次に T^5 のうちの 1 つの円周 (半径 R とする) の上に N_1 枚の D1 ブレーンを巻きつけて，円周に沿って運動量 N/R で動かす．すると，$N_1, N_5, N \to \infty$ の極限で，D1 ブレーンのホライズンの近傍には AdS_3 の時空ができ，そのエントロピーは $S_{AdS_3} \sim \sqrt{N_1 N_5 N}$ と計算される．一方境界では central charge $c \sim N_1 N_5$，基底エネルギー $\sim N$ の 2 次元 CFT となり，Cardy の公式から $S_{CFT_2} \sim \sqrt{N_1 N_5 N}$ となる．この場合，両者のエントロピーは係数まで含めて一致することが確かめられている．

における基本的な力学的自由度とは何かということを真剣に考え直すきっかけを与え，弦理論を記述するのに最も有効な力学変数を見つけるのに役立つことが期待される．また『1 次元低いものから高次元の情報を復元するダイナミクスとは何なのか』という問は，超弦理論あるいはそれを超えた量子重力理論のダイナミクスを理解する上で，重要な知見を与えてくれるものと思われる．

参考文献

1) ブラックホールの熱力学については P.K. Townsend, "Black holes", arXiv:gr-qc/9707012 が読みやすい．
2) ホログラフィー原理の原論文は, G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity", arXiv:gr-qc/9310026; L. Susskind, "The World as a hologram", *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377 [arXiv:hep-th/9409089]. エントロピーの上限やホログラフィー原理に関する, 歴史も含めた詳しい解説は, R. Bousso, "The holographic principle", *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 825 [arXiv:hep-th/0203101].
3) AdS/CFT 対応のレビューとしては，O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity", *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [arXiv:hep-th/9905111] が詳しい．
4) $AdS_5 \times S^5$ 上の超弦理論の Penrose 極限をとることで，弦の高次の励起についても一部のものについては AdS/CFT 対応が成立することが分かってきた．しかしながら，この結果をホログラフィー的に解釈するには，どこに screen を置くのか，など難しい点がいくつかある．原論文は，D. Berenstein, J.M. Maldacena and H. Nastase, "Strings in flat space and pp waves from N = 4 super Yang Mills", *JHEP* **0204** (2002) 013 [arXiv:hep-th/0202021].
5) ホログラフィー的くりこみ群については，次のレビューに詳しい文献表がある：M. Fukuma, S. Matsuura and T. Sakai, "Holographic renormalization group", *Prog. Theor. Phys.* **109** (2003) 489 (invited paper) [arXiv:hep-th/0212314].

（ふくま・まさふみ，京都大学大学院理学研究科）

II. 超弦理論からの展開

量子重力と共形場理論

高柳　匡

1. はじめに

物理学において最大の未解決の問題は，我々の住むこの宇宙がいったいどのようにして生まれたのかということであろう．アインシュタインが発見した重力の理論である一般相対性理論や様々な観測のデータより，宇宙がビックバンと呼ばれる爆発的な膨張を通じて，現在の巨大な宇宙に成長したことはよく知られている．しかしビックバンの出発点が何かというと，現在の物理学をもってしてもプランクスケール程度（10^{-33} cm 程度）という極めて小さな点のような「空間」，といった漠然とした推測しかできない．ここで，空間に括弧をつけたのは，このようにミクロな空間を記述する物理法則や幾何学が未だよく理解されていないからである．言い換えると，ミクロな世界を記述するには，量子力学の考え方が必要になるが，重力の量子論は未だ完成から程遠いのである．

重力を量子化したときに起こる一番厄介な問題は，物理量が量子効果を取り入れると発散してしまうという事実である．その発散の原因は，物質はすべて粒子（素粒子と呼ぶ）から成り立つという仮定であるが，粒子のサイズを少し広げて，小さなひも（弦）で置き換えるとうまく物理量が有限になってくれるというアイデアが超弦理論である．この超弦理論は，量子重力理論の最有力候補の理論で，例えばブラックホールのエントロピーの量子論的な説明にも成功しており，世界中の多くの素粒子理論研究者から支持されている．しかしながら，この超弦理論をもってしても，本当に量子重力の効果が強くあらわれるビックバンなどは，残念ながら未だ計算方法がわからない．何故なら，量子効果が大きいところを非摂動的な領域と呼ぶが，超弦理論の非摂動的な定式化がまだできていないからである．

弦理論の**双対性**[1]や **D ブレーン**の発見は，この問題点に関する大きな進歩であった．今までは，別々と思われた5つの超弦理論が，非摂動的効果を取り入れると1つに統一されるのである．ただし，この双対性は非摂動効果の定性的理解にはとても有用だが，定量的な計算にはあまり向いていない．双対性は弦理論と弦理論の等価性なので，両方とも重力を含んでおり，具体的計算を行うにはやはり量子重力的な定式化が必要とされるからである．それでは，量子重力理論を，重力を含まない量子論に移しかえることはできるであろうか？

この一見不可能に思えることを可能にするのが，**AdS/CFT 対応**である[2]．これを用いると超弦理論が記述する量子重力理論は，よく知っている量子力学の多体系（場の理論）と等価になるのである．後者は非摂動的に定義されているので，AdS/CFT を用いると超弦理論の非摂動的な定式化が与えられることになるのである．以下では，この AdS/CFT 対応とは一体何なのか，最近の話題も交えて解説したい．

2. 共形場理論とゲージ理論

まず最初に，AdS/CFT の **CFT** の部分について説明したい．CFT とは，Conformal Field Theory，すなわち共形場理論の略である．共形場理論とは，場の理論のなかで特に，長さ（もしくはエネルギー）のスケールを変えても物理が不変になる理論を言う．例えば，電子を記述する Dirac フェルミオンの理論は共形場理論ではないが，電磁場を記述する真空の Maxwell 理論は共形場理論である．なぜなら電子は，質量を持っていてスケールの変換で不変ではなく，逆に電磁波（光子）は質量がゼロだからである．

一般に，d 次元の場の理論は，Lorentz 対称性 $SO(1,d-1)$ と並進対称性を有する．d 次元の共形場理論になると対称性が $SO(2,d)$ に増えることがよく知られている．座標を x^μ $(\mu=0,1,2,\cdots,d-1)$ と書くと，このとき余分に増えた対称性は，前述のスケール変換 $x^\mu \to \lambda x^\mu$ と，特別共形変換

$$\frac{x^\mu}{|x|^2} \to \frac{x^\mu}{|x|^2} + b^\mu, \tag{1}$$

である．ここで λ と b^μ は任意の定数である．

先ほど共形場理論の例として Maxwell 理論を挙げたが，電磁波どうしは相互作用をしないので場の理論としてはかなり単純な例である．より非自明な理論で，共形場理論の例というとどんなものがあるだろうか？ 例えば，原子核を構成するクォークの間に働く強い相互作用（QCD 相互作用）を考えてみよう．これは，非可換ゲージ理論という理論で記述される．まず電磁場の理論に戻り，4 次元ベクトルポテンシャル A^μ による記述を思い出そう．物理的な電場や磁場に相当するのは，場の強さ $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であるので，任意関数 χ に対して $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ という変換で理論は不変である．この対称性がゲージ対称性で，A^μ をゲージ場とも呼ぶ．この A^μ を単なる数ではなく，$N\times N$ のエルミート行列に値をとるという拡張をしたものが，$U(N)$ 非可換ゲージ理論である．ゲージ対称性や場の強さはそれぞれ，以下のように拡張される（ここで χ は微小量とする）：

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi + i[A_\mu, \chi], \tag{2}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]. \tag{3}$$

(3) 式の第 1 項と第 2 項がそれぞれ A^μ の 1 次式，2 次式になっていることに注目されたい．これは，1 つのゲージ粒子が 2 つに分かれることを意味し，相互作用があることを示している．この興味深い理論は，Maxwell 理論のように一見スケール不変性があるように見えるのだが，残念ながら量子論的効果（ループ補正）で破れてしまうことが知られている．この代表例が，強い相互作用を記述する QCD 理論であり，その破れのおかげで，エネルギースケールが量子効果によって生じ，それが陽子や中性子の質量の源になっているのである．

この状況を一変させるのが，超対称性という考え方である．超対称性は，ボソンとフェルミオンを入れ換える対称性である．電子はフェルミオンであるが，それと対応するボソンはないので，我々の住む現実世界ではこの対称性は破れている．しかし，とりあえず仮想的にそのような対称性を導入してみよう．一般にこうすると，数学的構造が豊かになり解析を進めやすくなるのである．さて，いままで出てきたゲージ場 A^μ は，ボソンであるが，対応するフェルミオン ψ（ゲージーノと呼ぶ）を導入してみよう．しかしながらこの場合もスケール不変性は破れてしまう．だが，この操作を 4 回繰り返してみよう．そうすると結果として理論に出てくる場は，以下のとおりである．

ゲージ場（グルーオン）：A^μ,
4 つのゲージーノ：$(\psi^1,\psi^2,\psi^3,\psi^4)$,
6 つの実スカラー場：$(\phi^1,\phi^2,\cdots,\phi^6)$.

このときに，ちょうど量子論的効果がボソンとフェルミオンで相殺し，スケール不変性が厳密に成り立つのである．これは，$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論と呼ばれ，後で説明するように AdS/CFT 対応で最も重要な例となる．

より低次元の共形場理論も興味深い．例えば，ス

ピン系などの臨界現象に現れる2次元の共形場理論は，共形対称性が拡張されてVirasoro対称性と呼ばれる無限次元の対称性を有するので，解析や分類がとてもしやすくなる．また最近，3次元の超対称性ゲージ理論で共形場理論となるものが多数発見された．代表的な例は，$\mathcal{N}=6$ 超対称 Chern-Simons 理論と呼ばれておりその AdS/CFT 対応も得られている[3)]．

3. D ブレーンとゲージ理論

以上で AdS/CFT 対応の片側，すなわち CFT がどういうものか説明をした．もう片方の AdS の説明に行く前に，AdS/CFT 対応を理解する上で最も重要な役割を果たす **D ブレーン**を解説したい．

まず，超弦理論の弦には**閉弦**と**開弦**の2種類ある（図1参照）．閉弦は輪ゴムのようにつながったひもであるが，開弦は2つの端点を持つひもを意味する．非常にラフに言うと閉弦は重力の相互作用をもたらす．一方，開弦は端点に電荷を持つことができるので，電磁気のような相互作用を生み出し，非可換ゲージ理論で記述される．

このとき，D ブレーンと呼ばれる超弦理論の物体は，開弦が端を持つことができる平面として定義される．図1から分かるように，閉弦が吸収される物体ということもできる．この閉弦と開弦の立場を入れ換える操作が後に見るように AdS/CFT 対応の本質である．時空の座標を x^μ とすると，超弦理論は10次元でしか通常は定義できないので $\mu=0,1,2,\cdots,9$ である．弦上の座標を (τ,σ) と書いて，弦の10次元時空への埋め込みを $X^\mu(\tau,\sigma)$ であらわそう．このとき，D ブレーンで開弦が端

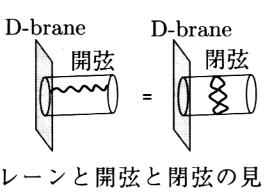


図1　D ブレーンと開弦と閉弦の見方による等価性．

を持つ状況には2種類あり，それぞれノイマンとディリクレの境界条件であらわされる．$p+1$ 次元がノイマンで，残りの $9-p$ 次元がディリクレと仮定し，それぞれの座標を x^N と x^D とする．この境界条件を式で書くと，

$$\partial_\sigma X^N|_{\text{境界}}=0, \quad X^D|_{\text{境界}}=y^D, \qquad (4)$$

となる．ここで y^D は任意にとれる定数で，D ブレーンの固定された位置をあらわす．この場合に D ブレーンは，$p+1$ 次元の平面に相当することから **Dp ブレーン**と呼ばれている．

さて D ブレーンの物理的な性質はどんなものだろうか．まず，D ブレーンの上には開弦の理論が存在するのが以上の説明から明らかであろう．II 型と呼ばれる最も基本的な超弦理論には，もともとは閉弦しか存在しない．しかしどこかに D ブレーンを挿入すると，その上には開弦の理論が初めて実現されるのである．この D ブレーンは，何枚も重ねることができる．N 枚重ねると，開弦の立場からすると N 種類の端点（電荷）を持つことができる．場の理論で解釈すると，場が $N\times N$ の行列の値をとることになり，前節で説明した非可換ゲージ理論になることがわかる．正確にはこのとき，弦の理論を点粒子の理論（= 場の理論）で近似するために低エネルギー極限をとる必要がある．このようにして，Dp ブレーン上の理論は，低エネルギー極限で $p+1$ 次元の $U(N)$ ゲージ理論で記述される[*1)]．

さて，超弦理論には超対称性がもともとあるので，Dp ブレーン上のゲージ理論も超対称性を有する．II 型超弦理論には IIA と IIB と2種類あり，それぞれで許される p の値は IIA が $p=0,2,4,6,8$ で，IIB が $p=-1,1,3,5,7,9$ である．特に $p=3$ の場合，つまりタイプ IIB 理論の D3 ブレーンを考

*1)　読者には何故ゲージ場が，D ブレイン上に存在するのか不思議に思う方もおられるかもしれない．しかし，D ブレーンを用いて現実にある物体（剛体）を実現するためにもこれは必要なことである．D ブレーンはもともと厚さがゼロの平面なので，一見その回転つまり角運動量をどう記述するのか分からない．しかし，ゲージ場が存在するおかげで磁場と電場を励起することでポインティングベクトルを生じさせ，角運動量を持つことができるのである．

えるとちょうど $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論が得られるのである．このように，共形場理論の最も重要な例は，D ブレーンの最も基本的なセットアップとして実現できるのである．

4. AdS/CFT 対応

さて，ようやく本題の AdS/CFT 対応の説明にとりかかろう．AdS/CFT 対応とは，重力とゲージ理論の対応，すなわち「**$d+1$ 次元の反ドシッター空間（AdS 空間）上の量子重力理論は，d 次元の共形場理論（CFT）と等価である.**」という主張である[2]．

この対応を理解するために，IIB 超弦理論における N 枚の D3 ブレーンを考えよう．この系は前節で説明したように，開弦の立場で低エネルギー領域を考えると $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論という共形場理論となっている．では閉弦の立場，すなわち重力理論の立場ではどう記述されるのだろうか？ ブレーンの枚数 N が大きいと，非常に重い物体なので一般相対性理論に従って時空は曲がる．さらに時空の計量を調べると，ブレーンに近づくにつれ 10 次元時空は，5 次元反ドシッター空間と 5 次元球面の直積 $AdS_5\times S^5$ に近づくことが分かる（図 2 参照）．

$d+1$ 次元，半径 R の反ドシッター空間 AdS_{d+1} は，時間が 2 つある $d+2$ 次元空間

$$ds^2=-dX_0^2-dX_{d+1}^2+dX_1^2+\cdots+dX_d^2, \quad (5)$$

内の超曲面 $X_0^2+X_{d+1}^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_d^2+R^2$，として定義される．これが d 次元共形場理論と同じ $SO(2,d)$ の対称性を持つことは明白である．

うまく座標をとると反ドシッター空間の計量は以下のような簡単な形になる．

$$ds^2=R^2\frac{dw^2-dx_0^2+\sum_{i=1}^{d-1}dx_i^2}{w^2}. \qquad (6)$$

この座標系では，共形場理論のスケール変換は，$x_\mu\to\lambda x_\mu,\quad w\to\lambda w$ に対応する．

さて，先ほどの D3 ブレーンの例に戻ろう．超弦理論に矛盾がないためには，開弦と閉弦のどちらの記述でも同じ物理的結果が得られるべきである．閉弦の側で，ブレーン近傍をクローズアップする極限をとったが，これは開弦の言葉で言うと重い開弦の励起を無視することに相当する．したがって，「$AdS_5\times S^5$ 上の IIB 超弦理論は，$\mathcal{N}=4$ 超対称性 $SU(N)$ ゲージ理論と等価である」という予想が得られる．これは前述の AdS/CFT 対応の主張の特別な場合 AdS_5/CFT_4 になっている．このように，AdS/CFT 対応は，ブレーンの近傍を重力とゲージ理論の両者の立場で考察することで導かれる．

この対応では，共形場理論（ゲージ理論）と比べて重力理論は，1 次元高い反ドシッター空間に住んでいる．(6) の座標で言うと，x^μ は共通の座標で，w が重力理論にのみ存在する余分な座標ということになる．この理由を理解するには，スケール変換で w も変化することに注目する．つまり，w はゲージ理論の長さのスケールに対応しているのである．特に AdS 空間の境界 $w=0$ は，共形場理論の立場では紫外極限に相当するので，微視的な立場では共形場理論はここに住んでいると考える場合が多い．共形不変性を破った場合を考えても同様な対応は成り立つと考えられているが，その場合には繰り込み効果でエネルギーによって結合定数などが変化してゆく．双対な重力の立場では w の逆数をそのエネルギースケールとみなすのである．ある次元の場の理論に，より高次元の重力理論の情報が含まれていることから，このような関係をホログラフィーと呼んだりもする[4]．

では，この AdS/CFT 対応は，具体的な物理量に関して何を予言するのだろうか？ AdS/CFT 対応の一般的な主張は，「重力理論の分配関数＝共形場理論の分配関数」と簡単にあらわせる．ここで，共形場理論は外場やパラメーター（例えば結合定数）

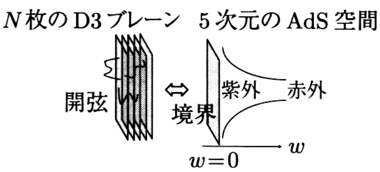


図 2　AdS/CFT の概念図.

を含み，それらは，重力理論側に含まれる様々な場（例えばディラトン）の AdS 空間の境界 $w=0$ での値であらわされる．したがって，それらで微分することで，共形場理論の相関関数を重力側から計算することができるのである．

このように，AdS/CFT 対応を用いると AdS 空間の量子重力理論をそれと等価な共形場理論で非摂動的に定式化することができるのである．これを逆に見ても興味深い結果が得られる．AdS 空間の大きさ R が十分大きい場合は，弦の量子効果は無視できる．その場合には，一般相対性理論に超対称性を導入した超重力理論で古典的に記述することができる．R とゲージ理論の結合定数 g_{YM} の関係は，$R^4 \propto N g_{YM}^2$ で与えられるので，超重力理論で記述できる場合は，ゲージ理論（共形場理論）側の結合定数が大きくなる領域に相当する．一般に，ゲージ理論の強結合領域を解析するのは非常に困難なので，それを重力側で幾何学的に計算できるのは大変都合がよいのである．

5. AdS ブラックホールと流体の粘性

AdS/CFT 対応のご利益がさらにあるのは，有限温度の場合である．強結合のゲージ理論を扱うには，格子ゲージ理論などの数値的な手法を用いる必要があるが，その方法では有限温度での非平衡なダイナミクスを解析するのは非常に困難だからである．AdS 空間自体は零温度の共形場理論に対応するが，有限温度にするには AdS 空間の内部にブラックホールが存在する場合を考えればよい．

5 次元の AdS ブラックホール解の計量は，以下で与えられる．

$$ds^2 = \frac{(\pi T R)^2}{u}[-f(u)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2] + \frac{R^2}{4u^2 f(u)}du^2. \tag{7}$$

ただし f は，$f(u) = 1 - u^2$ という関数．$u=1$ がブラックホールの地平線になっていて，境界近く $u \to 0$ では，$u = w^2$ とすると分かるように AdS_5 に近づく．このブラックホールは，温度 T を持っていることがユークリッド時間方向の周期性から分かるので，AdS/CFT 対応で等価な理論は，有限温度 T の 4 次元 $\mathcal{N}=4$ $SU(N)$ 超対称ゲージ理論と同定できる．有限温度では，フェルミオンやスカラー場は質量を持つようになるので，低エネルギーではグルーオン（ゲージ場）の系とみなせる．一般に超対称性がないとグルーオンは，強い相互作用で互いがひきつけられて離れられないという閉じ込めの現象を起こす．しかし今の系は，有限温度におかれているので実は閉じ込めが解けて，グルーオンは動き回れるのである．このことを確かめるためにエントロピーを計算してみよう．AdS/CFT 対応の原理からゲージ理論の熱力学的エントロピーは，ブラックホール (7) のエントロピーに等しいので，Bekenstein–Hawking の面積公式からブラックホールの地平線の面積を重力定数の 4 倍で割ったものに等しい．これよりエントロピー密度は，以下のように求まる．

$$s = \frac{1}{2}\pi^2 N^2 T^3. \tag{8}$$

T^3 に比例するのは，3 次元空間のスケール不変性のある物質に共通の性質である．ゲージ群のランク N の二乗に比例していることから，グルーオンが単体で存在している，すなわち閉じ込めから解放されていて，プラズマ状態にあることが分かる．

我々の現実世界では，クォークも存在するので，クォーク・グルーオンプラズマ（QGP）と呼ばれており，実際に重い原子核の衝突実験（RHIC 実験）でその存在が確認されている．その実験の結果，QGP は液体に近い物質であり，**粘性が非常に小さいこと**が分かった．この興味深い結果は，驚くことに AdS/CFT 対応を使って初めて理論的に理解することができたのである．残りの紙面を使って，この話題に関して説明を試みたい[5]．

流体の粘性（ずり粘性）を η とし，流体の z 軸方向に進む波の波数と振動数を q と ω とする．このとき，4 次元エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の波の進行と垂直な方向の成分 T_{xt}, T_{xz} を考えると，その分散関係が以下のようになることが $T_{\mu\nu}$

の保存則から従う：

$$\omega = -\frac{i\eta}{Ts}q^2. \tag{9}$$

分散関係に虚数 i が入っているのは粘性の効果で，波が周りの熱浴と相互作用して次第に減衰することを意味する．

この分散関係を，AdS/CFT を用いて重力側から再現してみよう．そのためには，対応する g_{xt} と g_{xz} の方向の重力波の分散関係を調べればよい．ここで重要なのは，物質はブラックホールに吸い込まれるが，逆に出てくることはないという事実から，ブラックホールの地平線 $u=1$ で波はすべて入射波になるという境界条件を課すことである．この条件の下で，q と ω が小さいと仮定して超重力理論の運動方程式を解くと，

$$h(u) = f(u)^{-i\frac{\omega}{4\pi T}}\left[1 + \frac{iq^2}{4\pi T\omega}f(u)\right], \tag{10}$$

ここで，$h(u)$ を，$qg_{tx}+\omega g_{xz} = u^{-1}e^{-i\omega t+iqz}h(u)$ で定義した．分散関係を求めるには，AdS の境界 $u=0$ でディリクレ条件 $h(u)=0$ を課せばよく（このようなモードは準正規モードと呼ばれる），以下のように求まる：

$$\omega = -\frac{i}{4\pi T}q^2. \tag{11}$$

これを，式 (9) と比較して，粘性とエントロピー密度のとても簡単な関係式を得る：

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \ \left(= \frac{\hbar}{4\pi k_B}\right). \tag{12}$$

右辺の括弧内の式では，自然単位系で通常 1 とおくプランク定数とボルツマン定数を復活させた．この結果 (12) は，超重力理論の AdS/CFT が適用できる系なら常に正しいことも知られている．

実際，具体的に QGP の実験で推定された粘性と (12) を比較してみると大体同じ程度に小さいことが分かるのである．一方，QCD の摂動計算から求めるとはるかに大きい値を予言してしまい，実験結果と合わなくなる．また超流動を起こす液体ヘリウムで観測されている粘性と (12) を比較すると 10 倍程度ヘリウムのほうが大きいことからも，(12) が非常に小さな粘性に相当することが分かるだろう．この業界では一時期，すべての物質に関して粘性の下限が (12) で与えられるのではないかという大胆な予想[6]もあったが，その後反例が見つかった[7]．しかしながら，$\frac{\eta}{s} > O(1)$ 程度の何らかの下限があるのではないかという推測は正しいのかもしれない．

6. おわりに

以上では，AdS/CFT の基礎を最近の話題も交えて概観してきた．量子重力の立場では，共形場理論によって非摂動的に定義できるという長所があり，また逆に，様々な物理系に出てくる強結合の共形場理論を古典重力理論を用いてより簡単に解析できるという現実的な利点がある．しかしながら最後に強調しておきたいのは，この AdS/CFT 対応というのはいわばブラックボックスであり，このような対応が成り立つ原理は未だに解明されていないのである．その意味で，AdS/CFT を様々な物理系に応用する研究とともに，AdS/CFT 対応の原理自体の研究も盛んに続けられていくであろう．

参考文献

1) 超弦理論の双対性に関しては，例えば本誌 2009 年 7 月号の高柳の記事を参照．
2) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [arXiv:hep-th/9711200]. 専門的なレビューは，O. Aharony et. al., *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111] を参照．また Becker–Becker–Schwarz の教科書にも説明がある．
3) O. Aharony, O. Bergman, D.L. Jafferis and J. Maldacena, *JHEP* **0810** (2008) 091 [arXiv:0806.1218 [hep-th]].
4) ホログラフィーに関しては，本別冊の福間氏の記事や，本誌 2007 年 12 月号における高柳の記事を参照．
5) 読みやすい専門的なレビューは，D.T. Son and A.O. Starinets, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57**:95–118, 2007 [arXiv:0704.0240 [hep-th]].
6) P. Kovtun, D.T. Son and A.O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601 [arXiv:hep-th/0405231].
7) Y. Kats and P. Petrov, *JHEP* **0901** (2009) 044 [arXiv:0712.0743 [hep-th]]; A. Buchel, R.C. Myers and A. Sinha, *JHEP* **0903** (2009) 084 [arXiv:0812.2521 [hep-th]].

（たかやなぎ・ただし，東京大学数物連携宇宙研究機構（IPMU））

II. 超弦理論からの展開

素粒子の統一理論としての超弦理論

大栗　博司

現在知られている全ての素粒子を支配する法則は,「素粒子の標準模型」と呼ばれる場の量子論にまとめられています*1). しかし, この模型には重力相互作用は含まれていません. 一般相対性理論と量子力学の統合は現代の理論物理学の最も重要な課題の一つです. 超弦理論は, 素粒子の標準模型を再現するために必要な材料を全て含んでおり, しかも重力相互作用も矛盾なく取り入れているので, 素粒子の究極の統一理論の最有力候補と見なされています.

超弦理論の研究から生み出された理論物理学の手法は, 統一理論の構成の他にも, 物理学の様々な問題に応用されています. 特に, AdS/CFT 対応と呼ばれる超弦理論と場の量子論との対応関係は, クォーク-グルーオン・プラズマの熱力学的性質やハドロン物理, さらには物性物理学の量子相転移や量子流体などの強相関現象などの理解に新しい視点を与えています. また, D ブレーン構成法は, ブラックホールの情報問題の解決をはじめとする量子重力のなぞを解決しました. さらに, 超弦理論の発展は数学の新しい進歩を触発しています.

これらの点については, すでに日本語による様々な解説があります. AdS/CFT 対応とその応用については, 一般向けの解説書[1)]があります. また, 本誌の特集号[2)]が昨年出版されており, また本別冊にも福間将文氏と高柳匡氏の解説記事が掲載されています. D ブレーン構成法と量子重力の諸問題の関係についても, 一般向けの解説書[3,4)]が出版されており, 筆者の最近の解説記事[5)]もあります. 超弦理論と数学との関係については, 本誌の特集号[6)]や江口徹氏の解説記事[7)], また筆者の解説記事[8~10)]もあります. このように多岐にわたる超弦理論の研究の全貌を俯瞰するためには, たとえば昨年の夏に CERN で開かれた超弦理論国際会議 Strings 2008 で筆者の行った総括講演の記録[11)]をご覧いただくとよいかもしれません.

そこで今回の記事では, 超弦理論の本来の目的に正面から向き合い, 超弦理論から素粒子の究極の統一理論を構成しようとする試みの現状について解説します.

1. 超弦理論の真空はいくつあるのか

素粒子の模型を作るときにまず問題になるのは, 理論の真空の構造です. このような考え方は現在では標準的ですが, これを素粒子論に最初に導入したのは南部陽一郎でした. 南部は, 場の量子論の対称性が真空状態によって自発的に破れることを示し, これによって素粒子の質量の起源を説明しました. (この業績については, たとえば筆者の解説記事[12)]を参照してください.)

そこで, 超弦理論についても, 真空の構造の理解

*1) 厳密には, 狭義の標準模型ではニュートリノが質量を持てないので, ニュートリノ振動の現象を説明するためには, 標準模型を拡張する必要がある.

が重要になりました．超弦理論は 1980 年代の半ばに究極の統一理論の候補として初めて脚光を浴びましたが，その当時には I 型，IIA 型，IIB 型の超弦理論と 2 種類のヘテロティック弦理論（ゲージ対称性が $E_8 \times E_8$ もしくは $Spin(32)/Z_2$ の 2 種類）の全部で 5 種類の理論が知られていました．量子効果を無視できる極限では，これらのすべての理論は，10 次元のミンコフスキー時空間を最低エネルギー状態の一つとして持ちます．

南部の考えた模型では，量子効果を無視すると対称性が破れていない状態がエネルギーが最も低いように見えますが，量子効果を計算に入れるとこれよりさらにエネルギーの低い状態が存在することがわかります．そして，この本当の真空状態で対称性が破れ素粒子が質量を持つのです．そこで，超弦理論においても，10 次元のミンコフスキー時空間は見かけの真空であって，量子効果を考慮に入れると，本当の真空状態では余計な 6 次元空間がコンパクト化されるなどして隠され，我々の世界である 4 次元の時空間が現れるのではないかとの期待が持たれました．

エドワード・ウィッテンは 1994–95 年に，背理法を用いて，10 次元のミンコフスキー時空間が超弦理論の真空ではないことを証明しようとしました．10 次元のミンコフスキー時空間が真空状態として存在すると，ばかげた結論が導き出されることを示そうとしたのです．しかしウィッテンは，これを仮定すると，上に述べた 5 つの弦理論が美しい双対性（デュアリティ）によって結び付けられていることを発見してしまいました．ウィッテンは，南カリフォルニア大学で開催された超弦理論国際会議 Strings '95 でこれを発表し，いわゆる「第 2 次超弦理論革命」の発端を作りました．今日では，双対性は超弦理論の整合性のためにはなくてはならないものとされていて，10 次元のミンコフスキー時空間の存在もその枠組みの中に組み込まれています．

さらに，超弦理論はこれ以外にも膨大な数の真空を持つことがわかってきました．たとえば，AdS/CFT 対応によると，一様等方で負の曲率を持つ時空間（反ドジッター時空間 = AdS）に定義された量子重力理論は，AdS より 1 次元低い空間に定義された共形対称性を持つ場の量子論（共形場の理論 = CFT）と，量子力学系として等価です．たとえば，高次元から 4 次元の AdS にコンパクト化された超弦理論については，それと等価になる 3 次元の CFT が数多く知られています．これらの CFT は，重力を含まない場の量子論なので，その数学的整合性は通常の場の量子論の手法で保証できます．そこで，AdS/CFT 対応を逆手にとると，各々の CFT は AdS 上の超弦理論を定義し，その真空状態を指定していると考えることができます．

2. ランドスケープとスワンプランド

超弦理論の 1 つの真空を選ぶと，そこからの低エネルギー励起状態は場の量子論によって記述することができます．これを低エネルギー有効理論と呼びます．たとえば，AdS/CFT 対応を使うと，各々の CFT に対応して AdS 上の超弦理論が存在し，それらから低エネルギー有効理論が演繹されます．このように超弦理論の真空の選び方によって様々な低エネルギー有効理論が現れる様子は，超弦理論のランドスケープと呼ばれます[13)]．超弦理論から実験的に検証可能な予言を引き出すためには，このようなランドスケープに何らかの制限があるのか，それともいかなる有効理論でもランドスケープの中で実現されてしまうのか，ということが問題になります．

超弦理論の低エネルギー有効理論に条件があることは，以前から知られていました．たとえば，一般相対性理論のアインシュタイン方程式は，古典物理学の運動方程式としては何次元の時空間にも定義できて解くことができますが，超弦理論で許される時空間の次元には上限があります．初期に発見された 5 種類の超弦理論では 10 次元，ウィッテンが双対性の発見とともにその存在を指摘した M 理論では 11 次元が上限です．また 10 次元で超対称性を仮定すると，重力理論とゲージ理論の量

子化の整合性から，ゲージ対称性は $E_8 \times E_8$ もしくは $Spin(32)/Z_2$ に限られます．

超弦理論の低エネルギー有効理論として実現できないようなラグランジアンの集合は，ランドスケープの補集合として，スワンプランド（沼地）と呼ばれています．ランドスケープとスワンプランドの境界を特定することは，超弦理論の実験的検証のために重要な問題です．

たとえば，これまでに超弦理論から導出された全ての低エネルギー有効理論では，スカラー場の値の変動幅に上限があることが知られています[14,15]．スカラー場の値が任意の大きさで変動できるような場の理論のラグランジアンを書くことは容易ですが，超弦理論の低エネルギー有効理論の適応範囲内では実現されていません．この事実は，超弦理論から初期宇宙のインフレーション模型を構成しようとするときに重要です．もしスカラー場が大きく変動できる理論がスワンプランドに属しているのなら，たとえば，インフレーション時代からの重力波の放出に強い制限が加わり，現在進行中および計画中の宇宙背景輻射の偏光や重力波の測定などの宇宙初期の観測に直接かかわることになります．

次に，超弦理論のランドスケープの中で，4 次元の「素粒子の標準模型」に似たものがどのくらい存在するのかを考えてみましょう．

3. コンパクト化

1980 年代半ばに超弦理論が脚光を浴びたのは，10 次元の時空間をコンパクト化して，4 次元の「素粒子の標準模型」が再現される道筋が提示されたからです．キャンデラス，ホロビッツ，ストロミンジャーとウィッテンは，1984 年にヘテロティック弦理論の余計な 6 次元をカラビ・ヤウ多様体と呼ばれる空間にコンパクト化し，4 次元の素粒子模型を構成しました[16]．この構成法の著しい点は，クォークやレプトンといった物質場，その間のゲージ相互作用，またそのゲージ相互作用を自発的に破るためのヒッグス機構などの標準模型の基本材料が，カラビ・ヤウ多様体の幾何学的性質から自然に現れる点です．

標準模型では，素粒子は 3 世代に分類されます．第 1 の世代はアップとダウンと呼ばれる 2 種類のクォーク，そして電子とニュートリノからなっています．電子とニュートリノはレプトンと呼ばれています．素粒子の標準模型では，このように 2 種類のクォークとレプトンを 1 組にして世代と呼びます．標準模型では世代の存在は仮定で，なぜ素粒子に世代があるのかは説明されていません．素粒子の世界で，同じ構造が 3 回も繰り返されているのはなぜでしょう．ヘテロティック弦理論では，クォークの各世代は，カラビ・ヤウ多様体の上の一般化されたラプラス方程式の解に由来し，世代の数はカラビ・ヤウ多様体のトポロジーによって決まります．素粒子の世代の起源が，高次元の幾何学から説明できるのです．

しかし，このコンパクト化は標準模型を完全に導出するものではありませんでした．たとえば，クォークはヒッグス場と結合することで質量を得ますが，この結合定数はカラビ・ヤウ多様体の形に依存しています．カラビ・ヤウ多様体の形が決まらないと，クォークの質量は演繹できません．また，カラビ・ヤウ多様体の形を記述するパラメータは，4 次元ではスカラー場として現れます．カラビ・ヤウ多様体の形が決まらないということは，このスカラー場の期待値が任意である，すなわちスカラー場の質量がゼロであることを意味します．しかし，このようなスカラー場の質量については，厳しい制限がついています．たとえば，質量があまり軽いと，初期宇宙の元素合成の機構と抵触することになります．また，質量の軽いスカラー場は長距離力を伝えるので，等価原理などについての精密実験や惑星の運動の観測による制限もあります．

このようなスカラー場に質量を与える機構があれば，カラビ・ヤウ多様体の形が定まり，標準模型のパラメータも演繹できるはずです．そもそも超弦理論は，10 次元の段階では不定パラメータを一切持たず，その低エネルギー有効理論のパラメー

タはすべてスカラー場の期待値によって決まります．そのため，スカラー場に質量を持たせ，その期待値を決定する機構を理解することは，超弦理論から標準模型を導出し，さらにそれを超える現象を予言するための重要なステップです．

4. ダイン–ザイバーグの問題

しかし，超弦理論で現れるすべてのスカラー場に質量を持たせることは容易ではありません．マイケル・ダインとネーサン・ザイバーグは，次のような考察でその難しさを指摘しました[17)]．超弦理論の全てのパラメータはスカラー場の期待値で定まります．特に，量子効果の大きさを支配するスカラー場があり，これはディラトン場と呼ばれます．超弦理論の低エネルギー有効理論が，ディラトン場 ϕ に質量を与えるポテンシャル $V(\phi,\cdots)$ を持っていたとしましょう．ここで，$\cdots$ はディラトン場以外の様々なスカラー場を表しています．超弦理論の量子効果が無視できる極限を $\phi\to\infty$ とすると，この極限では摂動近似が使えて，ポテンシャルは指数関数的にゼロになることがわかります．もしポテンシャルが無限遠点の近くで正に持ち上がっていれば，$\phi\to\infty$ の点は安定になりますが，これは量子効果が起きないつまらない（自明な）世界です．この考察から，ダインとザイバーグは，$V(\phi,\cdots)$ の非自明な極小値は，摂動計算では手の届かない領域にあると主張しました．レーストラック模型やKKLT模型のようにこの問題を部分的に解決したとされる例もありますが，全てのスカラー場に質量を与えるのは難しく，超弦理論の非摂動論的効果の本格的な理解が必要です．

2000年代になって，個々の真空を探すのではなく，ランドスケープの全体にどのように真空が分布しているのかを統計的に捉えようとする新しいアプローチが現れました．これについては，本別冊の江口徹氏と立川裕二氏の解説記事を参照してください．

5. 標準模型の導出に向けて：F-理論

超弦理論には真空がたくさん存在することがわかりましたが，その多くは我々の世界とはかけ離れた性質を持っています．そこで，実験で確かめられている素粒子の世界の定性的な性質を要請したときに，真空の選択肢がどのくらい狭められるかが次に問題になります．この点において，最近注目を集めているF-理論構成法について解説します．

F-理論とは，10次元のIIB型の超弦理論のある種の状態を，12次元の仮想的な空間を使って記述する方法です．IIB理論には，前節で現れたディラトン場の他に，アクシオン場と呼ばれるもう1つのスカラー場 θ が存在します．これを複素数に組んだ場

$$\tau=\theta+ie^{-\phi}$$

を考えましょう．IIB理論は $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対変換，

$$\tau\to\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\qquad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z}) \tag{1}$$

の下で不変です．ディラトン場 $e^{-\phi}$ は量子効果の強さを支配するので，特に変換 $\tau\to -1/\tau$ は弱結合領域と強結合領域を入れ替えることに注意してください．

IIB理論の10次元時空間を8次元ミンコフスキー時空間 $\mathbb{R}^{7,1}$ と2次元空間 M^2 の直積と考え，M^2 の複素座標を z と書きましょう．このとき，τ が z の正則関数

$$\tau=\tau(z) \tag{2}$$

であれば，それを使って M^2 の計量テンソルを

$$ds^2=\mathrm{Im}[\tau(z)]|f(z)|^2dzd\bar{z} \tag{3}$$

と定めると，IIB理論の運動方程式の解になります．ここで，(3)式右辺の正則関数 $f(z)$ は，計量テンソルが正しく変換をするように選びます．この解はIIB理論の超対称性の半分を保つので，量子効果を取り入れても厳密な真空状態として存在することが保証されます．

さて，IIB理論には $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性 (1) がありますが，これは2次元トーラスのモジュラー変換と同じ構造をしています．具体的には，与えら

れた τ に対して，複素平面 $\mathbb{C}$ の座標を w と取って，トーラス $T^2(\tau)$ を商空間，

$$T^2(\tau) = \mathbb{C}/(w \sim w + m + n\tau;\ n, m \in \mathbb{Z})$$

として定義すると，(1) で写りあう τ と τ' に対応するトーラスは同じ複素構造を持ちます．そこで，$\tau = \tau(z)$ で与えられたIIB理論の解を，

$$\pi : E^4 \to M^2;\quad \pi^{-1}(z) = T^2(\tau(z)),\quad z \in M^2$$

で定義されるファイバー束 E^4 を使って幾何学的に解釈することができます．このとき，考えている空間は $\mathbb{R}^{7,1}$ と E^4 の直積で，合計12次元の空間となっています．このように，12次元の空間の幾何学を使ってIIB理論を記述する方法をF-理論と呼ぶのです．この記述では，トーラスの部分はあくまで仮想的なものであり，実際の空間ではないことに注意してください．

カムラン・バッファは，特に M^2 が球面になるように $\tau(z)$ を選んだとき，F-理論は，2次元トーラスを使って $\mathbb{R}^{7,1}$ にコンパクト化されたヘテロティック弦理論と等価になっていると予想しました[18)]．この場合，ヘテロティック弦理論の量子効果の大きさを支配するのは，F-理論のディラトン場 ϕ ではなく，球面の面積です．たとえば，ヘテロティック弦理論の弱結合領域は，F-理論側では球面が小さい場合に対応します．

これは8次元にコンパクト化されたF-理論とヘテロティック理論の対応です．この対応を保ったまま両者をさらにコンパクト化すると，6次元のカラビ・ヤウ多様体を使って4次元にコンパクト化されたヘテロティック弦理論が，8次元のファイバー束で4次元にコンパクト化されたF-理論と等価になることがわかります．

ヘテロティック弦理論を6次元のカラビ・ヤウ多様体にコンパクト化すると，4次元の時空間の素粒子模型が構成できることを3節に書きました．ヘテロティック弦理論とF-理論は双対性によって結びついているので，ヘテロティック弦理論の摂動展開では手の届かない領域でも，F-理論を使えば解析が可能になります．そのためには，8次元のファイバー束の幾何学から，素粒子の種類やその間の相互作用を読み取る規則を理解する必要があります．この方面で最近画期的な進歩がありました．

F-理論では τ が特異性を持つ場所で面白いことが起きます．たとえば，複素座標 z の原点 $z=0$ の近くで

$$\tau(z) = \frac{1}{2\pi i}\ \log(z) + \cdots \tag{4}$$

となっている場合を考えましょう．原点の周りを一周すると，$\tau \to \tau + 1$ となりますが，これは $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性 (1) の下で同一視できます．IIB理論の言葉では，これは $z=0$ にD7ブレーンがあることを意味します．IIB理論では10次元の中の閉じた弦を考えますが，D7ブレーンがあると弦が開いて，その端点が8次元の部分空間の上を走ることができます．（D7ブレーンは空間7次元に拡がっていて，時間方向までを考えると10次元の時空間の8次元部分空間を占めます．）複素座標 z の原点にD7ブレーンを置くと，τ に (4) 式のような特異性が現れるのです．

上では $z=0$ で指定される8次元部分空間の周りで $\tau \to \tau + 1$ となる特異性を考えました．ファイバー束 E^4 の特異性は小平邦彦によって分類されており，ADE型のリー群である $SU(N)$, $SO(2N)$, E_6, E_7, E_8 に対応することが知られています．そこで，ADE型のリー群 G の各々に対応する7-ブレーンが考えられます．このような7-ブレーンの上には，ゲージ群を G とするゲージ場の自由度が局在して現れます．たとえば E_8 型の場合にはファイバー束の局所構造は $\mathbb{C}^3$ の中の方程式

$$x^2 + y^3 + z^5 = 0$$

で表現されますが，このとき $z=0$ に E_8 ゲージ場が現れるのです．このように例外群がゲージ対称性として現れるのはF-理論の特徴で，IIB理論の摂動的取扱いでは見えない現象です．これがF-理論による現象論の可能性を拡げます．

このように，F-理論では7-ブレーンの上にゲージ場の自由度が出現します．さらに，7-ブレーンが交差すると，そこからクォークやレプトンなどの物質場の自由度が現れます．この2年ほどの間に，一般の7-ブレーンの交差からどのような物質

場が現れるか，また，そのような物質場の間の相互作用がF-理論の幾何学によってどのように決まるかについての規則が明らかになってきました．このようにゲージ場や物質場の自由度が12次元空間の中の部分空間に局在して現れるので，高次元空間の局所的構造（7-ブレーンの交わり具合）だけを使って4次元の素粒子模型が構築できることが，F-理論の特長です．

F-理論による構成では，標準模型の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の3つのゲージ相互作用は，高エネルギーで1つのゲージ相互作用に大統一されます．このゲージ相互作用は7-ブレーンの指定する部分空間から出現するのに対し，重力相互作用の強さは余剰次元全体の体積から決まるので，この2つの力を特徴付けるエネルギースケール $E_{\rm GUT}$ と $E_{\rm Plank}$ は必ずしも一致しません．ここで，$E_{\rm GUT}$ は3つのゲージ相互作用が大統一されるエネルギー，$E_{\rm Plank}$ は重力の強さによって決まるプランク・エネルギーです．実際，$E_{\rm GUT}/E_{\rm Plank} \sim 10^{-3}$ であり，ゲージ相互作用と重力相互作用が異なる起源を持つと考えるのは自然です．

最近バッファの研究グループは，$E_{\rm GUT}/E_{\rm Plank} \to 0$ となる極限が存在するF-理論のコンパクト化に着目し，我々が経験的に知っている素粒子の世界の定性的な性質や期待される性質（4次元の時空間，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のゲージ相互作用による力の伝達とその大統一，3世代ある素粒子など）を要請すると，F-理論の局所的構造がほとんど一意的に決まってしまうと主張しました[19]．また，クォークの混合を表す小林・益川行列やレプトンの混合を表す牧・中川・坂田行列のパターンが定量的に再現できるとの報告もあります[20]．

超弦理論には膨大な真空があるので，そのランドスケープの中では，どのような低エネルギー有効理論も実現できるはずであるという考えを提唱する研究者もいます．しかし，F-理論を使って現実的な素粒子模型を構成しようとする最近の取組みは，素粒子の標準模型の定性的性質を再現せよとの条件が思いのほか縛りが強いことを示唆しています．この条件をさらに突き詰めることで，超弦理論の第一原理から実験的に検証可能な予言を導くことができるようになるかも知れません．この方面の研究は現在活発に進められているので，今後の発展が期待されます．

謝辞

この記事の原稿に有益なコメントを頂いた立川裕二，中山優，山崎雅人，渡利泰山の各氏に感謝します．

参考文献

1) 江口徹・今村洋介：『素粒子の超弦理論』岩波講座 物理の世界（岩波書店，2005年）．
2) 数理科学 特集「ゲージ重力対応」(サイエンス社，2008年2月)．
3) 橋本幸士：『Dブレーン―超弦理論の高次元物体が描く世界像』(東京大学出版会，2006年)．
4) 夏梅誠：『超ひも理論への招待』(日経BP社，2008年)．
5) 大栗博司：「量子ブラックホールと創発する時空間」パリティ 2009年6月号（丸善）．
6) 数理科学 特集「トポロジカルな弦の世界」(サイエンス社，2008年9月)．
7) 江口徹：「超弦理論のモジュライ」数理科学 2005年8月号（サイエンス社）．
8) 大栗博司：「トポロジカルな弦理論とその応用」日本物理学会誌 第**60**巻 (2005) 859.
9) 大栗博司：「幾何学から物理学へ，物理学から幾何学へ」数理科学 2009年4月号（サイエンス社）．
10) 大栗博司：「宇宙の数学とは何か」科学 2009年7月号（岩波書店）．
11) Strings 2008 のウェブサイトから入手可能：http://indico.cern.ch/getFile.py/access?contribId=38&resId=0&materialId=slides&confId=21917
12) 大栗博司：「素粒子物理学の50年―対称性の破れを中心に」科学 2009年1月号（岩波書店）．
13) L. Susskind, “The Anthropic Landscape of String Theory”, hep-th/0302219.
14) C. Vafa: “String Landscape and the Swampland”, hep-th/0509212.
15) H. Ooguri, C. Vafa: “On the Geometry of the String Landscape and the Swampland”, *Nucl. Phys.* **B766**, 21 (2007), hep-th/0605264.
16) P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten: “Vacuum Configurations for Superstrings”, *Nucl. Phys.* **B258**, 46 (1985).
17) M. Dine and N. Seiberg: “Is the String Theory Weakly Coupled?”, *Phys. Lett.* **B162**, 299 (1985).
18) C. Vafa: “Evidence for F Theory”, *Nucl. Phys.* **B469**, 403 (1996) [hep-th/9602022].
19) J. Heckman, C. Vafa: “From F-Theory GUT to the LHC”, arXiv:0809.3452.
20) J. Heckman, C. Vafa: “CP Violation and F-Theory GUTs”, arXiv:0904.3101.

（おおぐり・ひろし，
東京大学数物連携宇宙研究機構／カリフォルニア工科大学）

超弦理論の数値シミュレーション

西村　淳

1. はじめに

超弦理論が「究極の理論」として研究され始めて 25 年になるが，素粒子が本当にプランク長程度の長さの紐であるという証拠は今のところない．にもかかわらず，世界に数千人はいると思われる素粒子論研究者の多くは，超弦の実在を信じている．その理由の一つは，現代物理学における最重要課題である重力の量子化を，粒子に広がりを持たせるというアイディアだけで簡単に実現できるからである．それだけでなく，超弦理論は力を媒介する粒子と物質粒子のすべてを，単一の超弦の振動の仕方により統一的に表現できる．実際，プランクスケールくらいで「力の統一」が起こることは，加速器実験の結果に基づく繰り込み群的解析からも，強く示唆されている．

しかし，その必然性や美しさとは裏腹に，超弦理論を使って現実的な素粒子モデルを作ろうとすると，様々な人為的な操作を行うことになる．例えば，超弦理論では **10 次元の時空**が自然に現れるが，我々の住む 4 次元時空を作るためには，6 次元分を小さく丸めないといけない．またその際，フラックスを入れたりする必要が生じる．こうして作られる素粒子モデルは無数に存在し，いわゆる「ランドスケープ問題」を引き起こす．

このような状況において，超弦理論の研究をどのように進めるかは，専門家の間でも考えが分かれている．例えば，実験や観測と矛盾しないモデルを作ってみて，その範囲内で予言をしようというのが，ストリング現象論の立場である．また，無数のモデルの確率分布を評価する試みもある．

一方で，そもそも無数にモデルが作れてしまうのは，**摂動論**を超えた理解が不十分であることによる，という見方もある．摂動論とは，相互作用の強さに関する級数展開を用いて，計算を行う方法論である．相互作用が弱い場合は有効であるが，必ずしもそうでない場合は，摂動論では説明できない現象（非摂動現象）も起こり得る．

素粒子論研究の現場では，摂動論を用いた解析で事足りる場合も多いが，ハドロン（陽子や中間子など）の関わる物理では，数値シミュレーションによる**非摂動的計算**が重要な役割を果たしている．例えばハドロンの内部に存在すると考えられるクォークが，何故単独で取り出せないのか，という「クォーク閉じ込め」の問題は，80 年代初頭，量子色力学の数値シミュレーションによって理解された．また最近の大きな成果として，核子間相互作用の計算から，湯川ポテンシャルが導かれたこと，南部さんが予言したカイラル対称性の自発的破れが検証されたことなどが挙げられる．

超弦理論の場合，摂動論を超えた計算は長い間難しいと考えられてきたが，90 年代における大きな進展により，限られた状況では非摂動現象が解析的に調べられるようになった．また，行列で書かれた理論の数値シミュレーションを用いて，よ

り一般的な状況で超弦理論の非摂動的な性質を調べる道が開けてきた．

本稿では，そのような方法論を使ったブラックホールに関する最近の研究を紹介する．超弦理論では，超弦の多体系を用いることにより，その周辺にブラックホール時空を作ることができる．この超弦の多体系を記述する行列理論の数値シミュレーションにより，ホーキング輻射などに見られるブラックホールの熱力学的性質を精密に再現できることが示された．

重力の古典論である一般相対論によると，ブラックホールの中心では，時空の曲率が発散する．そのような点を一般に「**特異点**」と呼ぶ．これは，重力の量子効果が顕著になり，古典的な時空の描像が破綻していることを表す．上に述べた結果は，ブラックホール内部の量子時空構造が行列を用いて記述できることを意味しており，超弦理論のシミュレーション研究の基礎となるものである．また今後の展望として，10 次元時空のうち 6 次元分が小さく丸まることを，クォーク閉じ込めと同様に，理論の非摂動ダイナミクスとして理解できる可能性がある．それに関連した研究にも触れたい．

2. D ブレーン

超弦理論の非摂動的な性質を理解する鍵となるのが，D ブレーンと呼ばれるオブジェクトである[1)]．場の理論の古典解としてソリトンが良く知られているが，D ブレーンは超弦理論の古典解であり，その意味においてソリトンの類似物と考えられる．D ブレーンは 9 次元空間内に p 次元 $(p=0,1,\cdots,9)$ の超平面状に広がっており，弦はその上に端を持つことができる．このような状況を弦の世界面上の理論として記述すると，超平面と垂直な方向に Dirichlet 境界条件を課すことになるため，名前に D がついている．ブレーン（brane）は膜を表す英語 membrane に由来し，超平面の次元 p を明示して，**Dp ブレーン**とも呼ぶ．

一般に，古典解が与えられたとき，その解の周りの量子ゆらぎを考えることができる．D ブレーンの場合，量子ゆらぎは D ブレーン上に両端を持つ開弦の励起に対応し，低エネルギーでは $(p+1)$ 次元（p 次元は D ブレーンの広がっている空間方向，1 次元は時間方向）の**超対称ゲージ理論**で記述される．ゲージ場は，開弦の D ブレーン面内の振動から，ゼロ質量モードとして現れる．一般に D ブレーンが N 枚重なっている状況に対応する古典解を考えると，低エネルギー有効理論のゲージ群は $U(N)$ になる．これは，i 番目の D ブレーンと j 番目の D ブレーンに両端を持つ開弦のそれぞれから，ゼロ質量モードが出てくることから理解できる．また，開弦が D ブレーンに垂直な方向に振動するモードからは，$(9-p)$ 個のスカラー場が現れる．これらのスカラー場は $U(N)$ ゲージ群の随伴表現に属しており，N 行 N 列のエルミート行列の場で表される．

さて D ブレーン上に両端を持つ開弦が生成し，D ブレーンに沿って伝播した後，消滅するような過程を考えてみる．これをダイアグラムで表すと図 1（左）のようになる．このダイアグラムを D ブレーンに平行な超平面で切っていくと，閉じた弦が D ブレーンから放出されるように見える（図 1（右）参照）．このように，D ブレーンは閉じた弦の源と見なせるので，閉弦が凝縮した状態として特徴づけることもできる．閉じた弦には特にグラビトンが含まれているので，D ブレーンは重力の源にもなっていて，周囲の時空を曲げる．

実際，閉じた弦の低エネルギー有効理論である 10 次元の**超重力理論**を考えると，その古典解と

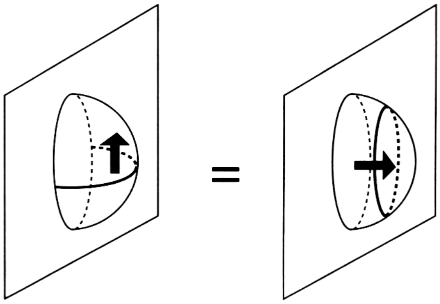


図 1　D ブレーン上に両端を持つ開弦の伝播を表す図（左）は，D ブレーンから閉弦が放出されている状況とも見なせる（右）．

して，$(p+1)$ 次元の方向には平坦になっていて，$(9-p)$ 次元の方向には球対称になっているものがある．この解は，D ブレーンが閉弦の源となって周囲に作り出される時空構造と考えられ，**p ブレーン解**と呼ばれている．

3. ゲージ／重力対応

本来，D ブレーンに沿って伝播する開弦の自由度と，10 次元時空（以下「バルク」と呼ぶ）の中を飛び回る閉弦の自由度は，互いに相互作用を及ぼしあっているので，個別に扱うことはできない．ところが，今考えている超弦理論のパラメタを使って上手い低エネルギー極限をとると，D ブレーン上の自由度とバルクの自由度を分離させることができる．このような極限を分離極限（decoupling limit）と呼んでいる．この極限では，上に述べた $(p+1)$ 次元の超対称ゲージ理論と 10 次元超重力理論の p ブレーン解が，D ブレーンに対する 2 つの独立した記述を与えることになる．この事実に基づき，両者の間に予想される対応関係が，1997 年に提唱された**ゲージ／重力対応**である[2]．特によく調べられているのは $p=3$ の場合であり，AdS/CFT 対応と呼ばれる．これは，ゲージ理論が $(3+1)$ 次元の共形不変な場の理論（Conformal Field Theory）であり，重力側に $AdS_5 \times S^5$ という時空構造が現れるためである．（AdS_5 とは 5 次元の負の定曲率空間で，S^5 は 5 次元の球面である．）

ここで少し注意しなければならないのは，バルクでは一般に，閉弦が互いに相互作用している状況になっていることである．これを超重力理論の古典解で記述できるためには，

(i) 閉弦の相互作用（量子効果）を無視でき，

(ii) 閉弦の広がりも無視できる

ことを正当化しなければならない．これらの近似を正当化できるパラメタ領域をゲージ理論側で見ると，(i) は N を無限大にすることに対応し，(ii) は結合定数を無限大にすることに対応する．即ち，10 次元超重力理論の p ブレーン解との対応が予想されるのは，正確には，$(p+1)$ 次元の $U(N)$ 超対称ゲージ理論において，N と結合定数を無限大にした極限ということになる．

場の理論においては，違う自由度で書かれた 2 つの理論が互いに等価になる例はよく知られており，双対性と呼ばれている．特に一方の理論の強結合領域が，他方の理論の弱結合領域に対応する場合は強弱双対性と呼ばれ，ゲージ／重力対応はその一例と見なすこともできる．また，1973 年のトホーフトの研究以来，一般に $U(N)$ ゲージ理論の N を無限大にした極限が，何らかの弦の古典論になることは予測されていた．その一つの具体化がゲージ／重力対応と言うこともできる．

ゲージ／重力対応の一つの応用としては，一般に解析が難しいゲージ理論の強結合領域を，重力の古典解によって調べる，ということが考えられる．特に，ハドロン物理や物性理論への応用が，近年盛んに議論されている．

4. ブラックホールの熱力学

ここではゲージ／重力対応を逆向きに使って，重力の古典解に付随した性質を，ゲージ理論側から理解することを考える．以下では $p=0$ の場合，即ち空間的な広がりのない点状の D ブレーンが N 個重なっている状況を考える．開弦の端は，その重なった点のいずれかに付着している．対応する 10 次元超重力理論の 0 ブレーン解は，9 次元空間方向に球対称なブラックホール時空の構造を持ち，ホライズン半径が任意パラメタとして存在する．

ブラックホールが与えられると，ホーキング輻射を特徴づける温度として，**ホーキング温度** T_{H} が定義できる．上の時空構造の場合，ホライズン半径がゼロとなり，ブラックホール的構造がちょうど消失する場合に $T_{\mathrm{H}}=0$ となる．またゲージ／重力対応という観点では，重力側のホーキング温度を，対応するゲージ理論の温度と同定できる．

さて，ブラックホールのエネルギー E から，熱力学第一法則 $dE = T_{\mathrm{H}} dS$ を用いてエントロピー

$\mathcal{S}$ を形式的に定義すると，一般に

$$\mathcal{S} = \frac{k_{\rm B}c^3}{4\hbar G_{\rm N}}\mathcal{A} \tag{1}$$

と書ける．ここで，右辺に現れる $\mathcal{A}$ はホライズンの面積を表す．実際ホライズンの面積は，ブラックホールの合体などに際し必ず増大することが，ホーキング輻射の発見以前から知られており，熱力学第二法則（エントロピー増大則）を形式的に満たす．しかし，このエントロピーを担う自由度が何であるか，即ちこのエントロピーの統計力学的な意味は，明らかでなかった．

このように形式論から導かれるブラックホールの熱力学的性質を明らかにするには，ブラックホール内部の微視的な状態を，然るべき量子重力理論を用いて正しく記述しなければいけない．このことは，ブラックホール自体が重力の古典解であるにもかかわらず，それに付随したエントロピーの表式 (1) に，ニュートンの重力定数 ($G_{\rm N}$) と共にプランク定数 ($\hbar$) が現れることからもわかる．従って，ブラックホール熱力学の微視的起源を説明できるかどうかは，量子重力理論の試金石と言える．これは量子力学の歴史において，水素原子の輝線スペクトルが果たした役割に喩えることができる．

5. 超対称行列量子力学の数値シミュレーション

今考えている 10 次元超重力理論における 0 ブレーン解の場合，N 個の D0 ブレーン上に両端を持つ開弦の多体系が，エントロピーを担っていると考えられる．その開弦の励起を記述する低エネルギー有効理論は，

$$S = \frac{N}{\lambda}\int dt\ {\rm tr}\left\{\frac{1}{2}(DX_i)^2 - \frac{1}{4}[X_i, X_j]^2 + \cdots\right\} \tag{2}$$

という 1 次元超対称ゲージ理論で与えられる．ここで，D は共変微分 $DX_i = \frac{dX_i}{dt} - i[A, X_i]$ を表し，$A(t)$ は 1 次元の $U(N)$ ゲージ場である．$X_i(t) \quad (i = 1, \cdots, 9)$ は，2 節に登場した N 行 N 列のエルミート行列のスカラー場である．以上のボゾン場の他に，(2) 式の $\cdots$ と省略されている部分には N 行 N 列のフェルミオン場も現れ，全体として高い超対称性（16 個の超電荷）を持つ系になっている．ここでは有限温度にするため，通常の処方せんに従い，ユークリッド時間 t を 0 から逆温度 $\beta = \frac{1}{T}$ までの間に制限し，ボゾン場とフェルミオン場に周期的，反周期的境界条件をそれぞれ課す．

一般に，(2) のような 1 次元場の理論は，すべての場が時間 t だけに依っているので，有限自由度の量子力学と見なすことができる．（このため (2) を「**超対称行列量子力学**」とも呼ぶ.）但し，重力側で超重力理論の古典解による記述を正当化するためには，行列の大きさ N を大きくし，かつ λ を（T^3 と比べて）大きくする必要があることを思い出そう．このようなパラメタ領域において具体的な計算を行うことは，これまで不可能だった．

モンテカルロ・シミュレーションは，一般に場の理論の強結合領域の計算に有用である．但し，連続的な時間変数 t に依存した場をそのまま計算機に乗せることはできない．通常用いられる格子ゲージ理論に基づくと，t を離散化することになるが，そのような方法は超対称性と相性が悪く，今の場合は適切でない．そこでまず，今考えている 1 次元ゲージ理論の場合，ゲージ不変性を然るべきゲージ固定条件により完全に固定できることに着目する．そのようにしてから，t に依存した場をフーリエ展開 $X_i(t) = \sum_n \tilde{X}_{in} e^{i2\pi nt/\beta}$ し，$|n| \leq \Lambda$ のモードだけを扱う．格子ゲージ理論に代わる，このような新しい方法[3)]を用いることにより，超対称性を尊重した計算がなされた[4)]．

ゲージ理論側では，エントロピーではなくエネルギーのほうが直接計算できる．そこで重力側でも，0 ブレーン解のエネルギーをホーキング温度 T の関数として書いておくと，

$$\frac{1}{N^2}\frac{E}{\lambda^{1/3}} = C\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{14/5} \tag{3}$$

となる．ここで係数 C は，

$$C = \frac{9}{14} 4^{\frac{13}{5}} 15^{\frac{2}{5}} \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{14}{5}} \simeq 7.41 \tag{4}$$

と具体的に得られている．

実際のモンテカルロ・シミュレーションでは，一般性を失うことなく $\lambda = 1$ にとることができる．

そうして得られた超対称ゲージ理論 (2) のエネルギーを，温度の関数としてプロットしたのが図 2 である[5)]．実線がブラックホールから計算された結果 (3) を表している．図 2 から一般の λ に対する結果を読み取るには，単に横軸を $\frac{T}{\lambda^{1/3}}$ に，縦軸を $\frac{1}{N^2}\frac{E}{\lambda^{1/3}}$ に置き換えればよい．すると，温度 T を固定して λ を大きくした場合，超対称ゲージ理論 (2) に対する結果が，ブラックホールに対する結果 (3) に漸近していくことがわかる．

ここで λ が大きい極限をとるのは，重力側で閉弦の広がりを無視する近似を正当化するためだった (3 節参照)．λ が大きくても有限である場合は，閉弦の広がりが無視できなくなり，低エネルギーの有効理論である超重力理論に，高階微分項が付け加わる．この効果により，(3) 式の右辺に対する主要な補正項として，$(\frac{T}{\lambda^{1/3}})^{23/5}$ に比例した項が加わる．その比例係数を未知パラメタとしてデータをフィットすると，図 2 の破線のように見事な一致が得られた．(但し，低温では有限 Λ 効果のため，$\Lambda = 6$ のデータが少し上にずれている.)

この結果は，超対称ゲージ理論 (2) で記述される開弦の量子多体系が，周囲に作り出しているブラックホール時空の熱力学を精密に再現できたこと，即ち，ブラックホール熱力学の微視的起源を完全に説明できたことを意味している．

さらに，D0 ブレーンに両端を持つ開弦の広がり

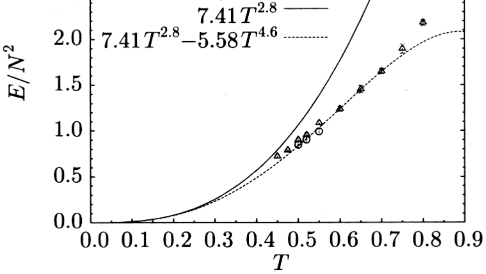


図 2　超対称ゲージ理論 (2) のエネルギーを温度に対してプロットした図．$\lambda = 1$ としている．実線はブラックホールの持つエネルギー (3) を表す．破線は閉弦の広がりによる補正を考慮して，1 パラメタでフィットしたもの．

を測定した結果，0 ブレーン解のホライズン半径と一致することが示された[6)]．これは，開弦がブラックホール内部全体に広がっているという，ブラックホールの「ファズボール描像」を支持する．素朴には，時空の曲率がプランクスケールくらいになるまで，古典的な時空の描像が成り立つと思われるが，D0 ブレーンの個数 N が無限大の極限をとっているために，このような状況が生じる．

また，この節で紹介した研究は，D0 ブレーンの場合にゲージ／重力対応を検証したことになる．これを AdS/CFT 対応に相当する，D3 ブレーンの場合に拡張する研究も始められている[7)]．

6. 超弦理論から 4 次元時空は現れるか

前節の結果は，超対称行列量子力学 (2) が，ブラックホール内部の量子時空を正しく記述していることを示すものである．一方 (2) 式では，重力を表すための計量場も，一般相対論で重要な一般座標不変性もあらわに見えない．これらのことから，一般相対論で扱うような計量場は，巨視的なスケールでのみ有効な概念であり，行列こそが時空の微視的構造を量子論的に正しく記述する力学的自由度であることが示唆される．

ここまで見てきた行列は，ゲージ／重力対応のゲージ理論側に現れるものとして登場した．これとは独立に，超弦理論の非摂動的な定式化として**行列模型**が提唱されている．例えば，石橋・川合・北澤・土屋が 1996 年に提唱した IKKT 模型[8)]は

$$S_{\mathrm{IKKT}} = -\frac{1}{4}N \,\mathrm{tr}[X_\mu, X_\nu]^2 + \cdots \qquad (5)$$

という形をしており，(2) 式と類似している．ここで X_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, 10)$ は $N \times N$ のエルミート行列である．右辺の $\cdots$ には，フェルミオンに対応するエルミート行列 Ψ_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, 16)$ も現れ，全体として高い超対称性を持っている．この模型が超弦理論の非摂動的な定式化と考えられる根拠については，文献 9) で丁寧に解説されているので参照されたい．

この模型では，10 個のエルミート行列 $\{X_\mu\}$ が，

超弦理論に現れる10次元の時空を表している．実際に時空がどのように広がっているかを見るには，

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{N}\mathrm{tr}(X_\mu X_\nu) \qquad (6)$$

という 10×10 の実対称行列の固有値を見ればよい．例えば，d 個の固有値が非常に大きく，残りが非常に小さいような場合，その配位 $\{X_\mu\}$ は d 次元的な時空を表す．行列模型の分配関数

$$Z = \int dX\, d\Psi\, e^{-S_{\mathrm{IKKT}}} \qquad (7)$$

において，上の意味で d 次元的な時空が支配的な寄与を与えることが示せれば，超弦理論から d 次元時空が非摂動ダイナミクスの結果として現れることになる．特に $d \leq 9$ であるならば，行列模型の持つ10次元の回転対称性が，N を無限大にする極限で自発的に破れることを意味する．

この行列模型の数値シミュレーションを行う場合，フェルミオン Ψ_α は先に積分しておくことになる．これは解析的に実行できて，$16(N^2-1)$ という大きさを持つ巨大な行列の行列式が得られる．この行列式は一般に複素数であり，10個のエルミート行列 $\{X_\mu\}$ の関数となる．面白いことに $\{X_\mu\}$ が潰れた配位のときに，行列式の位相は停留値をとり，$\{X_\mu\}$ を積分する際に寄与が強めあう．しかも，より低い次元の時空に潰れるほど，より高階の微係数まですべてゼロになるという構造がある[10]．もちろん，低い次元の時空ほどエントロピー的には損だから，両者の釣り合いで何次元まで潰れるかが決まるはずである．いずれにせよ，IKKT模型が10次元時空を潰す仕掛けを備えていること自体，大変興味深い．分配関数の被積分関数に位相が現れる系の数値シミュレーションは一般に難しいが，文献11)では新しい方法が提案されており，近い将来，明確な答えが得られるだろう．

また，数値シミュレーションとは別のアプローチとして，ガウス展開法を用いた計算もある．文献12)では分配関数に対する $d=2,4,6,7$ 次元の時空の寄与が評価され，N が無限大の極限で $d=4$ の時空が支配的になるという結論が得られた．この結論は，展開の次数を上げていっても変わらないことが，その後の研究により確認されている．

7. 終わりに

数値シミュレーションを用いた超弦理論の非摂動的研究によって，量子重力に対する新しい展望が開けてきた．特に，行列を基本的自由度とすることで，ブラックホールの特異点の問題が解けることを見た．同様に，初期宇宙におけるビッグバン特異点の問題も解けることが期待される．

量子色力学のシミュレーションは，クォーク閉じ込めの理解から始まり，今日，加速器実験で必要とされる物理量を定量的に計算できるまで発展した．超弦理論のシミュレーションによって，時空次元だけでなく，標準模型のゲージ群や世代数などが導ける日も，そう遠くないのかもしれない．

原稿を仕上げるにあたり，KEKの疋田泰章氏，百武慶文氏，物性研の押川正毅氏に貴重なコメントをいただきました．ここに感謝いたします．

参考文献

1) 橋本幸士：『Dブレーン—超弦理論の高次元物体が描く世界像』，東京大学出版会 (2006).
2) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
3) M. Hanada, J. Nishimura and S. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 161602 (2007).
4) K.N. Anagnostopoulos, M. Hanada, J. Nishimura and S. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 021601 (2008).
5) M. Hanada, Y. Hyakutake, J. Nishimura and S. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 191602 (2009).
6) M. Hanada, A. Miwa, J. Nishimura and S. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 181602 (2009).
7) G. Ishiki, S.W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 111601 (2009).
8) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys.* B **498**, 467 (1997).
9) 川合 光，数理科学，2002年4月号．(別冊「スーパーストリング」に再録．)
10) J. Nishimura and G. Vernizzi, *JHEP* **0004**, 015 (2000); *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4664 (2000).
11) K.N. Anagnostopoulos and J. Nishimura, *Phys. Rev.* D **66**, 106008 (2002).
12) J. Nishimura and F. Sugino, *JHEP* **0205**, 001 (2002).

(にしむら・じゅん，高エネルギー加速器研究機構)

臨時別冊・数理科学

ゲージ理論の発展

誕生から半世紀を越えて

本体 1895 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

I. 序論

一般ゲージ場理論　内山龍雄の業績を巡って	二宮　正夫
ゲージ場とその量子論	藤川　和男

II. その原理と起源

ゲージ理論の誕生	福山　武志
ゲージ場の一起源	吉川　圭二
ゲージ対称性と現代物理学	風間　洋一
非可換ゲージ場の量子論	藤川　和男
電磁気に見るゲージ原理　電子波で見るゲージ対称性とその破れ	外村　彰
ゲージ理論と対称性	橋本　義武

III. 素粒子物理への系譜

電磁気学から電弱統一理論へ	牟田　泰三 向川　政治
ゲージ理論としての標準模型と小林・益川理論	林　青司
大統一理論と幾何学	川村　嘉春
超対称ゲージ理論の真空と非摂動効果	坂井　典佑
超対称ゲージ理論における厳密解	伊藤　克司

IV. 拘束系への展開

車庫入れのゲージ理論	佐藤　文隆
対称性・保存則・非ホロノーム拘束	村井　信行
拘束系の力学とゲージ理論	中島日出雄

V. 幾何学とゲージ理論

低次元トポロジーとゲージ理論	古田　幹雄
弦理論と非可換幾何学	江口　徹
ゲージ理論と弦理論　AdS/CFT 対応	太田　信義
4 次元ゲージ理論と保型形式	中島　啓
時空の不確定性と非可換性	綿村　哲
計量擬似接続空間	河合　俊治

VI. ゲージ理論の応用と展開

超伝導真空	永長　直人
スピンネットワーク理論	小玉　英雄
ゲージ理論とランダム行列	西垣　真祐
ゲージ理論とヤング図形	加藤　晃史

サイエンス社

III. 非可換幾何学からの展開

量子重力理論 ——— 笹倉　直樹

量子重力と Wilson Loop ——— 北澤　良久

III. 非可換幾何学からの展開

量子重力理論

笹倉 直樹

1. はじめに

時間と空間はこの世界で最も普遍的に存在するにも関わらず，我々は特にその存在を意識しない．通常の意識の上では，あくまで物質が主体であり，時間と空間は物質をあらしめるためだけに存在する空虚な枠にすぎない．しかし，**重力の量子論**を研究していくと，時間と空間は決して静的でも空虚でもなく，ふつふつと煮えたぎった水にも似た，不可思議な荒々しい実体と思えてくる．我々が通常，時空を実体がないかのように思っているのは，時空の持つ固有のスケール（**プランク長** $\sim 10^{-33}$ cm）に比べて，我々があまりにも巨大で，非常に大まかにしか時空を捉えることができず，その存在を体感することができないからである．重力の量子論とは，このような不可思議な時空を物理的実体として考え，その量子論を記述する理論である．

では，時空の物理的実体とは何だろうか？ 残念ながら，現時点では，量子重力理論は完成からは程遠い夢の理論であり，時空の物理的実体についての特に有望と考えられる候補はない．その一方で，多くの研究者が，直接的または間接的に量子重力の研究に従事してきた．量子重力へのアプローチは研究者それぞれで，時空の数学的記述を仮定して演繹的に研究するものもいれば，大上段に立って新しい指導原理を唱えるものもいれば，思考実験より導かれる不等式を研究するものもいる．したがって，研究者が量子重力の解説記事を書けば，百人百様のものになるだろう．この解説記事は，あくまで私個人の研究軌跡に沿った些細なものであり，量子重力の研究は極めて多様な側面を持つものであることをまずここに断っておく．もっと詳しく知りたい読者は，挙げた参考文献等を参照されたい．

2. 重力の量子化の必要性

まず，なぜ重力の量子化が必要かを説明したい．これも研究者それぞれの意見があろうが，少なくとも 2 つの一般的な理由がある．

一つは，**統一理論**の観点からである．統一理論とは素粒子やそれらの相互作用が，ある単一の記述から自発的に派生して生じたとする理論で，例えば，ワインバーグ・サラム理論，大統一理論，弦理論がある．量子論は物理を記述する普遍的な理論であり，素粒子やそれらの間の 3 つの基本的相互作用（電磁気力，弱い力，強い力）は，場の量子論によって記述され，実験的にも確かめられている．特に上記の 3 つの基本的相互作用はゲージ場の量子論によって記述される．一方，重力を記述する一般相対性理論も，やはりゲージ場の理論の一種である．したがって，重力を含めた統一理論の構築のためには，一般相対性理論も量子化されなくてはならない．

もう一つの理由は，一般相対性理論の内包する限界から来るものである．これは，**特異点定理**と呼ばれ，エネルギー・運動量テンソルの局所的正定値性などの一般的な仮定の下で，重力崩壊や宇宙の時間発展の方程式の解が有限時間内に特異点を持つことをいうものである．このような特異点では一般相対性理論が破綻している．しかし，重力の量子論ではこのような破綻が生じないと期待されている．その理由は，一般に古典論は，量子論を古典近似することによって得られる近似的理論であるので，特異点が生じているところでは単に古典近似が悪いだけで，重力の量子論そのものの破綻を意味しないからである．

では，どのようなときに，古典近似は悪くなって量子論的取り扱いが必要になるのだろうか．一般相対性理論が局所的な距離を決める計量場を力学変数とする理論であることを考えれば，何か長さの量が関係するであろう．重力定数 G，光速 c，ディラック定数 $\hbar$ $(=h/2\pi : h$ はプランク定数) を使って作ることのできる長さの量は，唯一プランク長 $l_{\mathrm{P}}=(G\hbar/c^3)^{1/2}$ である．したがって，長さにしてプランク長 $l_{\mathrm{P}}\sim 10^{-33}\mathrm{cm}$，時間にして**プランク時間** $l_{\mathrm{P}}/c\sim 10^{-43}\mathrm{sec}$ を境にして，重力の量子論が必要になると考えられる．特に，時間や長さが零である特異点は量子論的に扱われるべきである．

一般相対性理論の特異点は，物理的に非常に重要な点である．例えば，宇宙の時間発展における特異点は，宇宙の始まりまたは終わりの点であり，一体なぜどのように宇宙が存在することとなったのかやその消滅の可能性を考える上で量子重力は不可欠であることを示している．また，重力崩壊に関しても，ブラックホールの情報消失という物理屋を長年苦しませ続けている問題があるが，ブラックホールの時間発展における特異点の存在は，その問題を更にややこしくしている．これらの超難問に対して，量子重力は何らかの答えを与えてくれるのではないかと期待されている．

3. 一般相対性理論の摂動論的量子化の困難

一般相対性理論の力学変数は局所的距離を与える計量 $g_{\mu\nu}(x)$ である．この力学変数は時空上の各点 x に付随しているが，このような各点ごとの力学変数を持つ理論は**場の理論**と呼ばれる．場の理論の量子化の標準的方法として，**摂動論的量子化**の方法があるが，これは，自由場の量子論（場の相互作用のない理論の量子化）から出発して，相互作用を相互作用定数の次数ごとに取り入れていくという量子化の方法である．一般にこのような方法をとると，相互作用の各次数で発散が起こる．この発散は，時空座標 x が連続変数であるため，場の理論の力学的自由度が連続無限個存在することと関係している．発散が存在するままでは取り扱えないので，高周波数のモードを切り捨てる紫外切断パラメータ Λ を導入して力学的自由度の数が局所的に有限になるようにして計算を実行する．**繰り込み可能な理論**とは，相互作用定数などの有限個の理論のパラメータに適当な Λ 依存性を持たせることによって，連続無限極限 $\Lambda\to\infty$ において，観測量からこのような人為的な切断の影響を取り除くことができる理論のことである．特に，3つの基本的相互作用（電磁気力，弱い力，強い力）を記述するゲージ場の量子論は繰り込み可能な理論である．

このような摂動論的量子化の手続きを一般相対性理論に適用しようとすると直ちに困難につきあたる．一般相対性理論の**アインシュタイン・ヒルベルト作用**は

$$S_{\mathrm{EH}}=\frac{1}{G}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{1}$$

であるが*1)，スカラー曲率 R は2階微分の項で長さ次元 -2 を持つので，重力定数 G の長さ次元は2である．このように相互作用定数が正の長さ次元を持つと，ある次数の摂動論的量子補正を計算したときに，例えば，

$$S_{div}=G^n\log\Lambda\int d^4x\sqrt{-g}R^{n+2} \tag{2}$$

*1) 簡単のため，$c=\hbar=1$ の単位系を使い，数係数等も無視した．

のような形の，$\Lambda \to \infty$ で発散する，任意の次数の高階微分項が一般には現れ得ることが，次元解析から分かる．(1) と (2) は形が異なるので，(2) の発散を繰り込むためにはアインシュタイン・ヒルベルト項 (1) だけでは十分ではなく，元々の作用に無限個の高階微分項を付け加えなくてはならない．これは，無限個の相互作用定数の導入を意味し，理論が予言不可能な意味のないものとなってしまう*2)．

このように，一般相対性理論の摂動論的量子化においては，人為的に導入した紫外切断パラメータの依存性を取り除くことができない．このことはむしろ，量子重力には固有の切断パラメータのようなものが，もともと存在すべきであることを示していると解釈することもできる．実際，量子論と一般相対性理論に基づいた思考実験を考えると，プランク長 l_P やプランク時間 l_P/c よりも細かい精度で距離や時間を測定できないことを大まかに示すことができる．つまり，プランク長やプランク時間より短い距離や時間は意味がないのである．果たして時空間は，プランク長 l_P 程度の大きさを持つ最小単位のようなもので作られているのだろうか？ このような立場では，量子重力の解明とは，この世界の最小単位とも言うべきものの解明であり，必然的に統一理論と関係することになるのだろう．

4. 量子重力理論への非摂動論的方法

前節で述べたように，一般相対性理論の摂動論的量子化ができないので，**非摂動論的量子化**が考えられた．強い力を記述する量子色力学における非摂動論的方法として格子ゲージ理論があり，数値計算の強力な方法として盛んに行われている．その基本的考え方は，時空間を有限サイズの格子

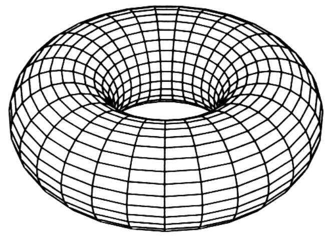


図 1　2 次元トーラスを四角形で格子化したもの．

で近似して，力学的自由度を格子の上に乗せて有限系としての計算を行い，格子の大きさを無限に小さくする“連続極限”を最終的にとるというものである．一般相対性理論の**格子理論**化は，一般に **Regge calculus** と総称され，基本となる考え方は，格子ゲージ理論と同様に時空間を格子状のものとし，一般相対性理論の力学的自由度である長さを格子の各辺に与えるというものである．図 1 に見るように，四角形を貼り合わせて，各辺に長さの自由度を与えたものは，ある幾何学的多様体の近似と考えることができる．一般相対性理論での量子化とは，あらゆる幾何学的多様体についての振幅の足し上げであるので，対応する格子量子重力では，格子の各辺の長さや，格子のとり方についての足し上げとなる．ここで格子量子重力は主に 2 つの方法に大別される．一つは，同じ大きさの正多面体*3) を複数考え，それらを貼り合わせることにより幾何学的多様体を近似するというものである．この場合，正多面体の大きさは変化させずに，正多面体の貼り付け方が格子量子重力の力学変数となる．正多面体の大きさを無限に小さくする“連続極限”では，あらゆる幾何学的多様体の足し上げを行えると考える．この方法による量子重力理論は**動的単体分割模型**と呼ばれ，特に 2 次元では数値計算だけでなく，等価な**行列模型**として記述することによる解析的手段もあり，成功している．もう一つの方法は，時空を分割している格子のとり方は固定して，各辺の長さを力学変数とするものである．この方法での格子量子重力理論は 2 次元ではうまくいかないが，3 次元の場合には，量子重力が位相的理論であることを反

*2)　この問題を回避するために，作用 (1) を変更して R^2 などの 4 階微分項を最初から含め，出発点とする自由場の理論に 4 階微分項も入れておけば，摂動論的に繰り込み可能にすることができる．しかし一般に，**ユニタリティー**（確率保存）が破れるという新たな困難が生じる．

*3)　2 次元では正三角形．3 次元では正四面体．他同様．

映して成功している．この3次元格子量子重力理論については，次節以降で詳しく説明する．残念ながら，本当に知りたい4次元時空で有効な格子量子重力理論については，模型が幾つかあるものの，はっきりとしたことは分かっていない．

5. 3次元格子量子重力理論

5.1 位相的場の理論としての3次元量子重力

まず連続理論の立場から，3次元時空における一般相対性理論をもう少しよく見てみよう．局所正規直行系の方法を使うことにして，力学変数を一般相対性理論の計量 $g_{\mu\nu}$ から，三脚場 e_μ^a とスピン接続 ω_μ^{ab} に変更する．三脚場と計量との関係は，η_{ab} を局所ローレンツ計量として，

$$g_{\mu\nu}=e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \tag{3}$$

で定義される．スピン接続は，捩率ゼロの条件

$$de^a - e_b\wedge\omega^{ab}=0 \tag{4}$$

から e^a より求まり，曲率テンソルは

$$R^{ab}=d\omega^{ab}+\omega^{ac}\wedge\omega_c{}^b \tag{5}$$

で与えられる．ここで ω^{ab}, e^a は1次微分形式 $\omega^{ab}=\omega_\mu^{ab}dx^\mu$, $e^a=e_\mu^a dx^\mu$ である．アインシュタイン・ヒルベルト作用は，これらの新しい力学変数を使うと，

$$S_{\rm EH}=\int d^3x\sqrt{-g}R=\int\epsilon_{abc}\,e^a\wedge R^{bc} \tag{6}$$

と書き直せる[*4)]．面白いことに，(4) と (5) は，e^a と ω_{ab} を独立変数と見て作用 (6) から得られる運動方程式と同じであるので，三脚場とスピン接続による記述と計量による記述とは古典的には等価である．計量による記述は2階方式，三脚場とスピン接続による記述は1階方式とそれぞれ呼ばれている．1階方式では，距離計量とスピン接続を結びつける捩率ゼロの条件 (4) は運動方程式としてしか実現されないので，一般に量子論的には2つの方式は異なるものである．しかし，1階方式による量子重力理論も，運動方程式だけが重要である古典極限では一般相対性理論と等価であるので，1階方式によるものを一般相対性理論の量子化と考えてもよい．

1階方式による量子重力理論の良い点は，作用 (6) は多様体の距離計量に依存しておらず，**位相的場の理論**であるということである．位相的場の理論は量子化が易しいため，実際の系を近似する模型としてよく研究されている．更に，非斉次ローレンツ群 $ISO(2,1)$ の生成子 P_a, J_a を使って作用 (6) を書き換えると[*5)]，

$$S_{\rm EH}=\int\left\langle A, dA+\frac{2}{3}A\wedge A\right\rangle, \tag{7}$$

$$A=e_aP^a-\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^{bc}J^a \tag{8}$$

のように，**Chern–Simons ゲージ理論**の作用に書き直すことができる．Chern–Simons ゲージ理論の量子論は，物理的動機だけでなく，結び目理論などの数学的動機からも，その性質がよく研究されており，3次元量子重力理論はこのようなよく研究されている対象に帰着される．

しかし，非斉次ローレンツ群 $ISO(2,1)$ のような不定計量を持つゲージ群のゲージ理論は量子化の方法がよく分かっていないため問題である．一方，同様な議論により空間3次元の量子重力を考えれば，非斉次回転群 $ISO(3)$ の Chern–Simons 理論になるため，この問題は回避されることになる．通常の場の量子論では，時間方向を空間方向に置き換える操作をウィック回転と呼び，場の量子論における有効な計算方法として確立している．しかし，量子重力理論の場合にこの操作がどのような意味を持つのかは不明である．あくまで最終的には $ISO(2,1)$ の場合を直接扱うべきであるのだが，上記の技術的理由により，以下では空間3次元の量子重力理論（$ISO(3)$）を考えることにする．空間3次元であっても，量子化によって生じる重力揺らぎの効果がどのようなものであるかの本質について，何らかの理解が得られることを期

*4) 簡単のため，$G=1$ とし数係数も無視した．

*5) $ISO(2,1)$ の生成子の交換関係は $[J_a,J_b]=\epsilon_{abc}J^c$, $[J_a,P_b]=\epsilon_{abc}P^c$, $[P_a,P_b]=0$ で与えられ，非縮退不変2次形式は $\langle J_a,P_b\rangle=\eta_{ab}$, $\langle P_aP_b\rangle=\langle J_aJ_b\rangle=0$ である．

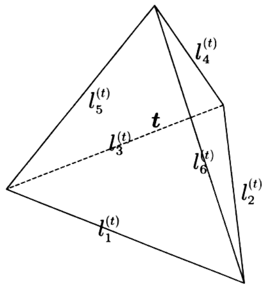


図 2　四面体と辺の長さ.

待しているのである.

5.2　ポンザノ・レッジェ模型——位相的格子理論

以上のように，空間 3 次元の量子重力理論が $ISO(3)$ Chern–Simons 理論で与えられることを見た．しかし一般に，場の量子論は連続無限個の自由度の系であるため，(7) のような作用を与えるだけでは定義が不十分で，その計算方法を明示しなければ意味がない．ここでは，$ISO(3)$ Chern–Simons ゲージ理論を非摂動的に定義する格子理論であるポンザノ・レッジェ模型を説明しよう．

3 次元空間として，四面体を貼り合わせて作られる 3 次元多様体 M を考える[*6]．簡単のため，表面のない閉じた空間を考えることにする．力学的自由度は各辺の "長さ" l_i で，零以上の整数または半整数の値をとるものとする[*7]．ポンザノ・レッジェ模型の分配関数は

$$Z(M) = \frac{1}{\Lambda^V} \sum_{\{l_i\}} \prod_{i \in L} (-1)^{2l_i}(2l_i+1) \times \prod_{t \in T} (-1)^{\sum_j l_j^{(t)}} \begin{Bmatrix} l_1^{(t)} & l_2^{(t)} & l_3^{(t)} \\ l_4^{(t)} & l_5^{(t)} & l_6^{(t)} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

で定義される．ここで，L は M 内のすべての辺の集合を表し，T はすべての四面体の集合を表す．$\{:::\}$ は，$SU(2)$ の $6j$-symbol で，各四面体の六辺の "長さ" を参照変数としている（図 2）．V は M 内の頂点の総数，Λ はある種の切断パラメータで，これについては後で説明する．

この模型の面白い点は，分配関数 (9) が M の位相的な性質にのみ依存していることである．例えば，3 次元球と位相的に同じ多様体を，四面体を貼り合わせて作る方法は無数にあるが，分配関数 (9) は 3 次元球ということにのみ依存し，四面体による構成法に依存しない．このような理論は，前節の位相的場の理論に対して，**位相的格子理論**と呼ばれる．すなわち，ポンザノ・レッジェ模型は位相的格子理論である．

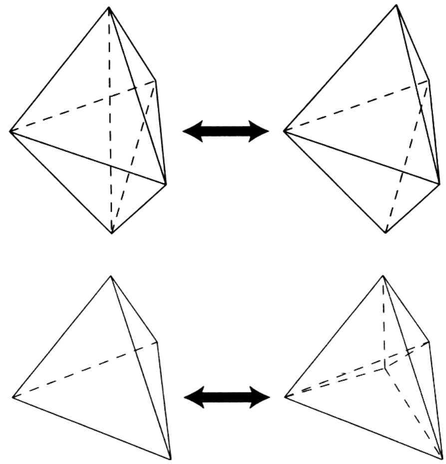


図 3　3 次元単体分割のエルゴード的局所変換.

ポンザノ・レッジェ模型が位相的であることは以下のようにして確かめられる．一般に位相的に同じ多様体を四面体で構成する方法は無数に存在する．しかし，実は幾つかの局所的な変換によって，それらはお互いに結ぶことができること（エルゴード性）が知られている．3 次元の場合には，図 3 の局所的変換を繰り返すことにより結ばれる．実際，分配関数 (9) がこれらの局所変換に対して不変になっていることを，$6j$-symbol の満たす恒等式を使うことで示すことができる．

これでポンザノ・レッジェ模型が位相的格子理論であることが分かったが，$ISO(3)$ Chern–Simons 理論との対応はどのように示されるのだろうか？ここでは詳しいことは省くが，ポンザノ・レッジェ模型において，物理的状態空間がどのようになっているかを議論することができる．そして，$ISO(3)$ Chern–Simons 理論の物理的状態空間と一対一に対応していることを示すことができる．

*6)　数学的には PL 多様体と呼ばれるものを考えている．
*7)　長さを零以上の整数に限ることもできる．回転群として $SU(2)$ か $SO(3)$ を考えているかによる．

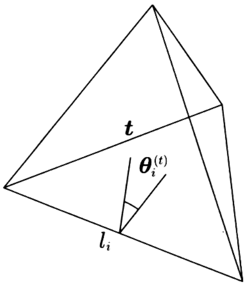


図 4　四面体の辺 i での内角．

また別の物理的な理解として，粗雑ではあるが，直接的に一般相対性理論と関係づけることもできる．これまでは，四面体の内部について特に言及してこなかったが，平坦であると仮定しよう．すると，曲率などの空間的ゆがみは辺上に局在することになる．このような 3 次元空間に対して，作用 (6) は

$$S_{\rm EH} = \sum_{i \in L} \varepsilon_i l_i \tag{10}$$

と評価される．ここで，ε_i は辺 i の周りの欠損角と呼ばれるもので，

$$\varepsilon_i = 2\pi - \sum_{t \ni i} \theta_i^{(t)} \tag{11}$$

で定義され，$\theta_i^{(t)}$ は，辺 i を含む四面体 t の，辺 i における内角である（図 4）．空間が曲がっていない所では，ある辺を囲むすべての四面体の，その辺における内角の和は 2π であるが，曲がった所では 2π からずれ，ε_i が非零の値を持つことになる．Chern–Simons 理論として量子重力理論を考えるときには，多様体の局所的な向き（$\det(e)$ の符号）に制限はなく逆向きの四面体も同等に寄与するので，作用 (10) を考えたときの格子量子重力の分配関数は

$$\prod_{i \in L} (-1)^{2l_i} \prod_{t \in T} \cos\left(\sum_{i \in t} \theta_i^{(t)} l_i\right) \tag{12}$$

のような形で与えられる．一方，$6j$-symbol はその参照変数が大きいとき，漸近的に

$$\begin{Bmatrix} j_1 \, j_2 \, j_3 \\ j_4 \, j_5 \, j_6 \end{Bmatrix} \sim \frac{(-1)^{\sum_i j_i}}{\sqrt{12\pi V}} \cos\left(\sum_i j_i \theta_i + \frac{\pi}{4}\right) \tag{13}$$

と振る舞うことが知られている[*8]．よって，(9) は (12) とほとんど等しく，一般相対性理論の格子理論化と直接関係していることが分かる．ただし，位相的な性質を持つためには，(12) では駄目で，(9) は，位相的という良い性質を持たせるために，(12) を少し変更したものと見ることができる．

最後に，(9) のパラメータ Λ について述べよう．実は Λ は発散量で，(9) の表式では，∞/∞ で有限量を得る必要があるため，定義に曖昧さが残っている．この問題を回避する方法は 2 通り知られている．一つは力学的自由度のゲージ固定をするもので，もう一つは $SU(2)$ の代わりに量子群 $SU(2)_q$ を考える **Turaev–Viro 模型**である[*9]．両者とも位相的性質を持ち，前者が元と同じ $ISO(3)$ Chern–Simons 理論である一方で，後者は**宇宙項**のある 3 次元量子重力理論に対応する．宇宙項とは，一般相対性理論の作用で，

$$\lambda \int d^3x \sqrt{-g} \tag{14}$$

で与えられ，最近，宇宙背景放射の精密観測等からその存在がほぼ決定的となった項である．しかし，非常に小さな λ の観測値を説明する説得力ある理論が存在しないため，**宇宙項問題**と呼ばれ，解決すべき大きな課題となっている．ところで，Turaev–Viro 模型では，$q = e^{2\pi i/(k+2)}$ のとき[*10]，辺の“長さ”が最大 $k/2$ までに限られ，有限力学的自由度の系となっている．一方，この模型を調べると，宇宙項の値は $\lambda = \left(\frac{4\pi}{k}\right)^2$ で与えられることが分かるので，力学的自由度の数と宇宙項の大きさは反相関の関係にある．3 次元空間の理論であるので現実味は乏しいが，このような意外な関連は，宇宙項問題を考える上で一つの示唆を与えているのかもしれない．

6. 粒子との結合――非可換空間の出現

前節では重力だけの系を考えたが，ここでは，ポンザノ・レッジェ模型に粒子も導入する．粒子が

*8)　V は j_i を辺の長さとする四面体の体積．

*9)　分配関数は，量子変形された $6j$-symbol などを使って，(9) と同様な形で定義される．

*10)　k は自然数で，$k \to \infty$ が $ISO(3)$ の場合になる．

あるとその質量によって空間が曲げられるが，別の粒子がその曲げられた空間を通ることにより粒子間の相互作用が生じる．結果として，粒子の運動方程式が量子重力の効果により変更を受ける．これを見てやると，面白いことに，粒子は通常の空間を運動しているのではなく，**非可換な空間**を運動していることが導かれる．

粒子との結合を考えるために，粒子が辺の上を運動するように四面体分割を考えたとしよう．詳しいことはここでは省くが，粒子がある辺では，その辺の周りに $U(1)$ ホロノミーが生じる．この効果は分配関数 (9) において，その辺に対して，

$$(2j+1) \to \chi_j(h_\theta) \tag{15}$$

の置き換えになる．ここで，質量 m の粒子に対して，$\theta = \kappa m$ ($\kappa = 4\pi G$) で，$\chi_j(h_\theta)$ とは，基本表現での $SU(2)$ の元

$$h_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{16}$$

の，スピン j 表現でのトレースである．この置き換えを適用することにより，粒子が存在する場合の分配関数を具体的に調べることができ，有効作用

$$\int d^3x \left(\partial_i \phi \star \partial_i \phi - \frac{\sin^2 m\kappa}{\kappa^2} \phi \star \phi + h \phi \star \phi \star \phi \right) \tag{17}$$

が得られる*11)．ここで，粒子の場 ϕ は

$$\phi(x) = \int_{SU(2)} dg\ e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg)} \tilde{\phi}(g) \tag{18}$$

のように定義され，$X = x^i \sigma_i$ (σ_i はパウリ行列) であり，“平面波” 間の積 $\star$ は，

$$e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg_1)} \star e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg_2)} = e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg_1 g_2)} \tag{19}$$

で定義される．(18) を見れば分かるように，通常の場の理論と異なる点は，運動量空間が $SU(2)$ の群空間に変更されていることで，このことが，積 (19) を通じて，非可換な空間を出現させている．

7. おわりに

ここまで説明してきたように，2 次元や 3 次元空間の量子重力理論については比較的良く解析されているが，現実の 4 次元時空の量子重力についてはほとんど分かっていない．しかし，自由度の数と宇宙項との意外な関係や，粒子の場の有効理論に非可換空間が出現したという 3 次元空間での事実などは，4 次元時空でも何らかの形で成立する可能性もあり面白い．特に後者については，時空次元数などの詳細によらずに，量子重力を半古典的に取り扱うことによる思考実験に基づいて，時間や距離などの時空間的観測量に対する**不確定性関係**が導かれており，量子論的時空の出現が量子重力の非常に一般的な要請であることを示唆する．したがって，3 次元空間の場合のように，単に量子重力の有効理論として非可換空間が現れるというよりは，むしろ逆に，新たな量子論的時空概念に基づいて量子重力を構築するほうが自然のように思える．実際，量子化された時空間上での重力についての研究も行われてきている．将来，このような量子重力の新しい定式化によって，重力に対する現在の理解では全く謎である宇宙項問題などを，ごく自然に理解できるようになれば面白いだろう．

*11) 粒子間の直接相互作用が定数 h の 3 点の場合．

参考文献

1) 一般相対性理論については，R.M. Wald: *General Relativity*, Chicago Press, (1984).
2) 量子重力の非摂動論的アプローチについては，J. Ambjorn, B. Durhuus and T. Jonsson: Quantum geometry. A statistical field theory approach, Cambridge Monogr. *Math. Phys.* **1**, 1 (1997).
3) 3 次元量子重力から導かれる非可換場の理論については，L. Freidel and E.R. Livine: Ponzano-Regge model revisited. III: Feynman diagrams and effective field theory, arXiv:hep-th/0502106.
4) 時空間の不確定性については，L.J. Garay: Quantum gravity and minimum length, *Int. J. Mod. Phys.* A **10**, 145 (1995) と，Y.J. Ng: Quantum foam and quantum gravity phenomenology, *Lect. Notes Phys.* **669**, 321 (2005).
5) 非可換空間については，数理科学 2004 年 9 月号特集「可換から非可換へ」，サイエンス社.

（ささくら・なおき，京都大学基礎物理学研究所）

量子重力とWilson Loop

北澤 良久

1. はじめに

量子重力とは，重力理論の量子化を意味します．重力理論は，太陽系の惑星からりんごに至る物体の運動を統一的に説明したニュートンによる万有引力の発見に始まりました．最も巨視的な物理的スケールを持つ宇宙の理解に不可欠なアインシュタインの一般相対性理論は，重力を時空の幾何学的歪みと関係づけました．一方量子力学は，微視的な原子・分子の世界を記述する基本法則です．一般相対性理論を含めた古典力学系が，初期条件を指定すれば決定論的予言を与えるのに対比して，量子力学は確率論的予言しか与えません．このように重力と量子論はその性質を全く異にしており，それゆえ重力理論の量子化は決して容易ではありません．実際アインシュタインは，量子論の基礎を築いた光電効果でノーベル賞を受賞したにも拘わらず，「神はサイコロを振らない」と量子力学的な世界観を容易に受容しようとはしませんでした．

一般相対性理論と量子力学は，20世紀物理学の大きな成果であり両者の整合性を図ることの理論的重要性は指摘するまでもありません．分子・原子よりさらに微視的な素粒子の世界の研究は，20世紀後半巨大加速器を用いて推進され，無限自由度の量子力学（場の量子論）に基づいた素粒子の標準模型に集大成されました．一方最も巨視的な物理的スケールを探求する宇宙物理に関しても，一般相対性理論に準拠した宇宙物理の標準模型が最近成立しました．それによると宇宙初期は，ビッグバンと呼ばれる大爆発で始まったとされています．宇宙は断熱膨張を続けており，宇宙の温度は時間をさかのぼるほど上昇しますから，宇宙初期の物理を理解するためには素粒子の標準模型の知識が不可欠になります．このように最も巨視的なスケールの法則である重力と，微視的なスケールの法則である量子論の物理的接点が初期宇宙に存在することが明らかになりました．

ビッグバンの残滓として現在観測されているものが3度Kの宇宙背景輻射です．これは宇宙初期に，宇宙が高温であったとき宇宙を満たしていた黒体輻射が，宇宙の膨張とともに断熱膨張して冷やされたものです．光は，原子核と電子が束縛されて宇宙が晴れ上がったとき以降自由に伝播できるようになりました．それゆえ我々が3度K輻射によって観測できるのは，宇宙が晴れ上がった時点における太古の宇宙の姿です．宇宙背景輻射は等方ですが，僅かな非等方性が観測されました．この事実は，宇宙論の基本仮定である宇宙の一様等方性を実証するとともに，僅かな非等方性は，銀河等の宇宙の大規模構造形成の種となったと考えられています．

宇宙背景輻射の揺らぎを研究することによって，宇宙空間の曲率と宇宙を満たしているエネルギーの組成が明らかになりました[16]．その結果によると宇宙空間は平坦で，素粒子の標準模型に登場する

クォーク・レプトンで構成されるおなじみの物質は宇宙のエネルギーの5%弱を占めるのみであり，残りの3割は暗黒物質，7割が宇宙項と同定して矛盾しません．宇宙背景輻射の揺らぎ自身は，宇宙初期の急激な宇宙膨張によって生じたと考えられています．インフレーションと呼ばれるこの現象は，素粒子の標準模型をはるかに超えたプランクスケールに迫るエネルギースケールで起こったと考えられています．このような我々の宇宙がなぜ，どのようにして生成されたのかを理解するためには，素粒子の標準模型の枠組みの中では不可能であり，重力の量子化が不可欠と考えられます．

2. ゲージ理論

素粒子の標準模型は，ゲージ場の理論によって電磁相互作用・弱い相互作用・強い相互作用を記述することに成功しました．場の理論は，素粒子の生成・消滅演算子である場を基本的な自由度とする無限自由度の量子力学系です．ゲージ理論の基本的な対称性は，ゲージ不変性です．ゲージ不変性とは，理論の作用がゲージ変換の下で変化しないことを意味します．標準模型においてクォーク・レプトンを表す場は，ゲージ変換の下で特定の群の表現として変換します．電磁相互作用のゲージ群は $U(1)$ であり，強い相互作用のゲージ群は $SU(3)$ です．数学的に前者はアーベル群であり，後者は非アーベル群に属します．ゲージ変換のパラメーターは時空座標に依存しますから，ゲージ不変性を保障するためには，クォーク・レプトン場のみならず質量を持たないベクトル場（ゲージ場）の存在が不可欠です．電磁相互作用のゲージ場は，電磁場に他ならず，強い相互作用のゲージ場はグルーオンと呼ばれています．

強い相互作用を記述するゲージ理論はQCDと呼ばれますが，2004年度のノーベル賞はQCDにおける漸近的自由性の発見に対して，Gross・Wilczek・Politzerに授与されました．漸近的自由性ゆえ，QCDは電磁相互作用と反対に相互作用の強さが低エネルギー領域ほど強くなります．クォークは実験的に検出されていませんから，核子内に閉じ込められていると考えられています．クォークの閉じ込めは，どのような機構で起こるのでしょうか．クォークは，色と呼ばれるQCDの電荷を持っており，QCDの電場を介して他のクォークと相互作用しています．電子に付随した電場のフラックスは，等方的に広がります．その結果電子間には，距離の二乗に反比例したクーロン力が働きます．クォークに付随したQCDの電場のフラックスが，ひも状に絞られているとしたらどうでしょうか．この場合クォーク・反クォーク間の電場のエネルギーは両者の距離に比例することになります．それゆえクォーク・反クォーク間には常に一定の引力が働くことになり，クォーク・反クォークを引き離すためには無限のエネルギーが必要になります（図1参照）．

ここでクォーク・反クォークが対生成されて時空内を伝播し対消滅する過程を考えてみましょう．このプロセスに伴ってクォーク・反クォークは，時空内にループ状の軌跡を描きます（図2参照）．本論の主役であるWilson Loopとは，このようなプロセスに対応する演算子に他なりません．Wilson Loop $W(C)$ は，クォーク・反クォークが時空内に描くループ C に依存し，以下の数式で表現されます．

$$\mathrm{Tr}\left[\mathrm{P}\exp i\int_C dX^\mu A_\mu(X)\right]. \tag{1}$$

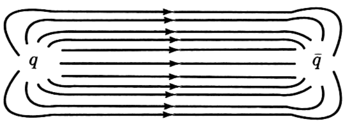


図1　クォーク・反クォーク間のQCDフラックスはひも状に絞られる．

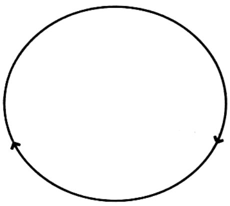


図2　クォーク・反クォーク対は時空内にループを描く．

クォークと反クォークはひも状の電場によってつながっているとすると，ひもはループを端とする面を描くことになります．C を境界とする面 S の面積を $|S|$ としましょう．電場のエネルギーは，ひもの長さに比例するので，$W(C)$ の期待値が $\exp(-|S|)$ 的に振る舞えばクォークの閉じ込めが起こっていることの証拠となります．電子のように，電場のフラックスが等方的に広がっている場合は，電場のエネルギーは電子の自己エネルギー的に振る舞いますので，$W(C)$ の期待値はループの長さを $|C|$ とすると $\exp(-|C|)$ 的に振る舞います．このように Wilson Loop は，ゲージ理論の振舞いを記述するゲージ不変な基本的オーダーパラメーターです．

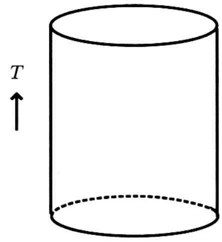


図 3　閉弦が時空内を伝播するとき描く世界面．

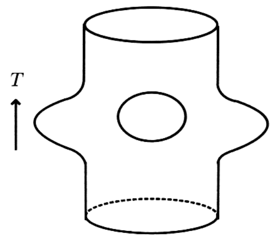


図 4　閉弦・相互作用は世界面にハンドルを形成する．

3. 弦理論

さて 21 世紀の物理学における重力の量子化の必然性と，ゲージ理論における Wilson Loop の説明は済ませましたが，その両者はなぜ関連しているのでしょうか．ここで両者をつなぐものとして弦理論を紹介しましょう．実際歴史的にも弦理論は強い相互作用の研究から誕生しました．QCD の電場はひも状に絞られていると考えられ，強い相互作用の様々な特徴は現象論的にひもを基本自由度として理解できます．粒子の運動を記述する場合，時空内で粒子が描く世界線の長さで与えられる作用を用いると，粒子は作用を停留化するような運動をします．同様にひもの運動を記述する作用は，時空内でひもが描く面の面積で与えられます（南部・後藤作用）．閉じたひも（閉弦）が伝播するときに描く世界面は，両端が始状態と終状態の閉弦に対応した筒になります（図 3 参照）．1 つの閉弦が，2 つの閉弦に分離し再度 1 つの閉弦に再結合するプロセスを考えてみましょう（図 4 参照）．弦の分離と結合は，それぞれ 3 つの弦が関与するプロセスであり，弦の相互作用によって引き起こされます．このプロセスの結果，弦の世界面には，1 つの穴が開くことになり世界面のトポロジーが変化します．このように弦の相互作用は，弦の描く 2 次元面のトポロジーで決定されます．

QCD は $SU(3)$ ゲージ群に基づいていますが，ゲージ群を $SU(N)$ に拡張しさらに N を無限大にする極限（ラージ N 極限）を考えることによって，ゲージ理論が弦理論に関係づけられることを't Hooft が見出しました．彼の議論は，ゲージ理論の摂動展開に現れるファインマン図形の解析に基づいたものです．ファインマン図形において，クォークは矢印付の線で，ゲージ場はお互いに逆向きの 2 本線で表されます．矢印の付いた線は，ゲージ理論の N 種類の電荷の流れを表しますから，電荷の保存則によって各線は交差することなく閉じたループを形成します．各ファインマン図形はこれらのループの集合であり，特定の 2 次元面と対応することが見て取れます（図 5 参照）．N 種類の電荷がループを流れ得ることから，ループごとに因子 N が付随します．摂動展開にはループごとにゲージ理論の結合定数 g^2 が付随しますので，両者を合わせるとループ展開因子は，g^2N であることが分かります．この組合せを't Hooft 結合定数と呼び，ラージ N 極限において固定される自然な結合定数となります．各ファインマン図形の重みは，その図形が描かれた 2 次元面のトポロジー

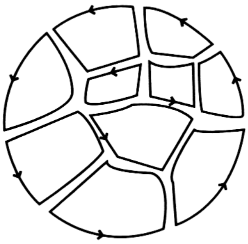


図 5　Wilson Loop 期待値に現れるファインマン図形．2 次元円盤に対応．

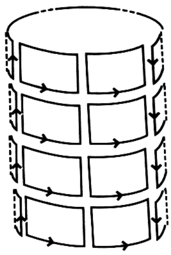


図 6　Wilson Loop の 2 点関数は，閉弦の描く世界面（図 3）と対応．

によって決まり，トポロジカル展開係数は $1/N$ であることが示されました．

ゲージ理論のラージ N 極限において，ゲージ理論のファインマン図形中に弦理論の本質である 2 次元世界面的構造を同定したことは，ゲージ理論と弦理論の関係の本質を捉えたものです．弦理論におけるスムースな世界面は，ゲージ理論の摂動の高次に現れるような稠密なファインマン図形に対応するはずです．よってゲージ理論の強結合領域で弦理論との対応がつくと期待されます．QCD においては，非摂動効果によって QCD の電場自身がひもを形成し，物理的実体として弦が形成されていると予想されます．ゲージ理論において Wilson Loop の相関関数を計算すると，そのファインマン図形は Wilson Loop を境界とする世界面と対応します（図 6 参照）．よってゲージ理論の Wilson Loop は，この対応において閉弦の生成・消滅演算子に対応することが明らかになりました．

弦理論の最も魅力的な点は，閉弦自由度の中に重力子を含んでいる事実です．重力の量子化において最大の問題はゲージ理論が繰り込み可能であるのに対して，繰り込み不可能であることです．この事実は重力相互作用が次元を持っており，エネルギーとともに急速に増大することに深く関係しています．一般相対性理論によれば，重力とは時空の歪みに他なりません．よってプランクスケールほどの小さなスケールでは，時空は大きく揺らいでおり，幾何学的な記述は破綻をきたすと予想されます．すなわち一般相対性理論は，重力の低エネルギー有効理論に他ならず，プランクスケールにおいては，量子的に整合した別の記述法が存在すると予想されます．このような整合した理論とは，短距離の発散の困難を含まず，量子力学の確率解釈と整合するもののはずです．弦理論は，重力子を含むすべての物理的状態が正定値ノルムを有する理論であって，短距離の発散を含みません．弦理論には，タキオンによる不安定性を避けるために超対称性が不可欠であり，重力子を含むためには臨界次元と呼ばれる特定の次元 (10) を仮定する必要があります．それゆえ現実の物理に対応させるためには多くの課題が存在しますが，量子論と整合する重力理論を与えるという点で最も有力な量子重力理論候補です．

4. 弦理論と行列模型

弦理論に短距離の発散が存在しないことは，摂動論的には弦を記述する世界面上の作用のコンフォーマル不変性と深く関連していますが，物理的には弦が基本的長さを有しておりそれより短距離の自由度を有していないことを反映していると考えられます．弦理論とゲージ理論の対応がラージ N 極限で見出されましたが，低次元の弦理論は行列模型および行列量子力学によって非摂動論的に定式化されました．これらの行列模型の作用は行列の固有値のみに依存し，行列の固有値間には量子的な反発力が働きます．低次元の行列模型では，固有値間の反発力とポテンシャルによる力の均衡によって，ラージ N 極限で安定した固有値分布が実現されます．こうして実現される行列の固有値分布は，弦の伝播する次元の一つを形成します．

2 次元を超えた高次元弦理論を記述する行列模

型では，量子的な効果によって固有値間には引力が働き，弦理論に存在するタキオンに対応した不安定性を引き起こします．この不安定性を避けるためには，行列模型においても超対称性の導入が不可欠です．超弦理論の非摂動論的自由度として，D–ブレーンの重要性が認識されました[1]．弦理論には両端を持つ開弦と端を持たない閉弦が存在しますが，長い間この両者を記述する理論は異なった理論だと考えられていました．しかしながら，弦が端を持つことができる広がりを持った自由度（D–ブレーン）を導入することによって，両者を統一的に理解できます．即ち開弦理論を，D–ブレーン上の弦理論と解釈することができるからです．D–ブレーンは，0 次元（インスタントン）から 10 次元までの様々な次元の広がりを持ちます．このように弦理論は，弦以外にも様々な次元の広がりを持つ自由度を有することが明らかになりました．

N 個の D–ブレーン系を考えてみましょう．D–ブレーンには弦が付随していますので，この系には 2 つの D–ブレーンに端を持つ，N^2 個の開弦が存在します．これらの自由度は，N 次元のエルミート行列に対応します．D–ブレーンは，超弦理論の半分の超対称性を保つことが知られており，N 個の D–ブレーン系を記述する有効理論は，D–ブレーンと同じ次元の最大の超対称性を持つ $U(N)$ ゲージ理論であることが分かります．具体例として N 個の D–インスタントン系の有効理論は，10 次元超対称ゲージ理論を 0 次元にリダクションした（場の時空座標依存性を落とした）行列模型となります．

N 個の D 粒子系の有効理論は行列量子力学となりますが，むしろこれらの自由度を基本的自由度として 11 次元超重力理論を構成しようというアイデアが提起されました[2]．ここで，行列模型のラージ N 極限において弦理論との対応が期待されることを想起しましょう．D–インスタントン系は，IIB 超弦理論に関連しますので，D–インスタントン的行列模型（IIB 行列模型）のラージ N 極限において，IIB 超弦理論が非摂動論的に定式化されると期待できます[3]．ゲージ理論の Wilson Loop はラージ N 極限において閉弦の生成・消滅演算子に対応しました．行列模型の Wilson Loop はゲージ理論の Wilson Loop を 0 次元にリダクションしたものとして定義できます．

$$\mathrm{Tr}\left[\mathrm{P}\exp i\int_C dX^\mu A_\mu\right]. \qquad (2)$$

行列模型のゲージ対称性は $U(N)$ 対称性に他なりませんが，行列模型の Wilson Loop は行列の多項式のトレースであり，$U(N)$ 変換の下で明らかに不変なオペレーターです．行列模型の Wilson Loop（式 2）が定義される経路 C は，ゲージ理論と異なり閉じている必要もありません．実際に以下では直線状の経路が重要な役割を演じます．重力子は閉弦自由度に含まれますから，重力子を生成する Wilson Loop が存在するはずです．実際 IIB 行列模型においては，超対称性のために重力子は IIB 超重力多重項の一部となりますが，それらに対応する生成演算子を Wilson Loop を用いて構築することができます[10]．

5. 行列模型と非可換時空

アインシュタインの一般相対性理論は，リーマン幾何学を用いて時空の幾何学的特徴を記述します．重力の量子化に際し，リーマン幾何学を超える新たな幾何学が必要になると予想されますが，その有力な候補が非可換幾何学です．非可換幾何学は，幾何学を非可換で結合的な代数に抽象化しますが，まさにそれは行列に他なりません．具体例として平坦な非可換時空を紹介しましょう．平坦な非可換時空は，正準交換関係を満たす演算子の組によって実現されます．量子力学によれば，位相空間はプランク定数を単位として量子化されますが，非可換時空においては時空が最小面積を単位として量子化されます．非可換時空は，最小面積を持つという点で弦理論に類似しており，両者には深い関連があると予想されます．行列模型の基本変数は，時空の座標と解釈される行列であり，平坦な非可換時空を表現する正準交換関係を満たす演算子の組は，行列模型のラージ N 極限におけ

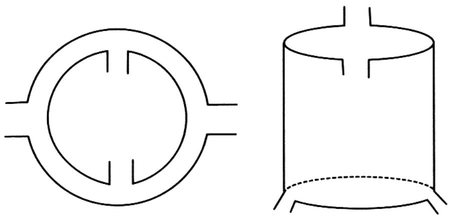


図 7 非可換時空上のゲージ理論の非プラーナー図形は閉弦の描く世界面と類似.

る古典解と見なすことができます．行列を古典解と揺らぎに分解することによって，非可換時空上のゲージ理論は，行列模型を用いて自然に構成されます[4,5]．このようにして行列模型においては，時空と物質（ゲージ場）が古典解と揺らぎとして行列自由度内に統一されます．

非可換時空上のゲージ理論は，通常のゲージ理論から場の積を Moyal 積と呼ばれる無限個の微分演算子を含む積に置き換えることで得られます．場がゆっくり変化するような長距離極限においては，Moyal 積は通常の積に帰着しますので，非可換時空上の場の理論は，古典的には通常の場の理論に帰着します．量子論的には，Moyal 積に現れる無限個の微分演算子がループ積分を通じて興味深い効果をもたらすことが見出されました[11]．この効果は，非プラーナー図形に対応するセクターに起因します（図 7 参照）．この効果によって非可換時空上のゲージ理論には，局所的な場の理論には存在しない新たな長距離相互作用が生ずることになります．紫外・赤外混合（UV/IR Mixing）と呼ばれるこの非可換時空上の場の理論に特有の現象は，弦理論において開弦理論の量子補正に閉弦が現れる現象に類似しています．重力は閉弦的自由度ですから，非可換時空上の場の理論に量子効果として現れる可能性があります．実際 IIB 行列模型における超重力はこのような機構で実現されています．

6. 非可換時空上のゲージ理論のオブザーバブル

非可換時空上のゲージ理論に局所的でゲージ不変なオブザーバブルは存在しませんが，Wilson Line と呼ばれる時空上で積分されたゲージ不変なオブザーバブルが存在します．Wilson Line は行列模型の Wilson Loop から，行列を古典解と揺らぎに分解することによって自然に得られます[6]．Wilson Line の運ぶ運動量は，Wilson Line の長さに比例します．行列模型における Wilson Loop 同様，Wilson Line は閉弦の生成・消滅演算子に対応すると予想されます．直線的な Wilson Line は，弦の基底状態に対応し，振動している Wilson Line は，弦の励起状態に対応します．Wilson Line はその形状を記述するパラメーターのとり方によりませんが，その事実から重力理論のゲージ対称性を含んだ閉弦理論のゲージ対称性を導くことができます[14]．非可換時空上のゲージ理論は，弦理論的に D ブレーン上に構成することができますが，その場合にも閉弦の生成・消滅演算子として Wilson Line が現れます．

運動量 P を運ぶ Wilson Line は，非可換時空の不確定性により，運動量に直交する方向に最小面積を θ としたとき θP 程度広がります．運動量 P を運ぶ Wilson Line の 2 点相関関数は，縦 θP，横 $\sqrt{(\theta P/P)}$ の長方形の Wilson Loop の期待値の計算に類似しています．クォーク・反クォーク間には距離に反比例したクーロンポテンシャルが存在しますので，Wilson Line の期待値はクォーク・反クォークの自己エネルギーを除いて $\exp(\sqrt{(P\theta P)})$ 的に振る舞います．一方 3 点以上の相関関数には，同様な議論により指数関数的な因子は存在しないことを示せます．2 点関数を 1 に再規格化すれば，3 点以上の相関関数は，運動量の増大とともに指数関数的に減少することが分かります[12,13]．このような Wilson Line の大運動量領域でのソフトな振舞いは弦理論と共通する性質であり，最小面積以下の自由度が両者に存在しないことを反映しています．

一方低エネルギー領域では Wilson Line の相関関数はどのように振る舞うでしょうか．量子論的に解析し易い 4 次元 $N = 4$ 超対称ゲージ理論を考えてみましょう．通常の $SU(N)$ ゲージ理論に

おいては，超重力子の生成・消滅演算子は $SU(N)$ 不変な局所的オペレーターであり，部分的に超対称性を保ちます（BPS オペレーター）．AdS/CFT 対応によると，ラージ N 極限において，BPS オペレーターの相関関数は，5 次元 AdS 空間上の超重力理論を用いて古典的に計算できます[7~9]．4 次元の局所的ゲージ理論は，5 次元 AdS 空間の境界にあるとされており，そこでは AdS 空間の計量が発散します．重力理論（弦理論）が局所場の理論に帰着するのは，場の理論における任意の微小な長さが，計量の発散のために有限の物理的長さに拡大されるからだと解釈できます．ゲージ理論は，強結合領域で弦理論と対応がつくと予想されますが，BPS オペレーターに関しては，量子補正を受けないので摂動論が適用可能なゲージ理論の弱結合領域でも対応をチェックできます．

超対称性を有する IIB 行列模型を用いて，非可換時空上の超対称ゲージ理論を構成することができます．その場合超重力子の生成・消滅演算子を，Wilson Line を用いて構成できますが，off–shell においては通常のゲージ理論とは異なり，超対称性を保つことができません．それゆえこれらのオペレーターは，有限な繰り込みをうけることになります．さらに通常のゲージ理論と異なり，紫外・赤外混合（UV/IR Mixing）効果が存在します[15]．この理論においても，超重力理論を使って相関関数を計算できると予想されていますが，関連する超重力解の計量はどこでも発散せず有限に留まります．この違いは，非可換時空上の超対称ゲージ理論が最小の長さを有することに由来すると解釈されますが，平坦な時空の弦理論と類似しています．このような理由で，非可換時空上の超対称ゲージ理論と超重力理論の対応を理解することは，量子重力理論とゲージ理論の対応をより一般的に理解するために重要な役割を果たすと予想されます．

非可換時空上の超対称ゲージ理論において，1 ループレベルの有効作用を計算すると，非プラーナー図形が存在するために，Wilson Line の 2 次式が現れます．一方古典的な作用およびプラーナー図形に対応する有効作用は，Wilson Line の 1 次式の形をしています．有効作用に現れた Wilson Line の 2 次式は，Wilson Line 間に超重力子が交換されたと解釈できる構造をしており，理論に量子的な超重力理論が内在することを強く示唆します．ゲージ理論において，プラーナー図形のみ寄与するようなラージ N 極限は，古典的な重力理論に対応すると想定されます．行列模型の非プラーナー図形が，量子重力効果に対応する可能性は非常に魅力的であり，重力を量子化するためには，行列模型の非プラーナー図形に対応するセクターの理解が本質的に重要であると思われます．

参考文献

1) J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724 (1995), hep-th/9510017.
2) T. Banks, W. Fishler, S. Shenker and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **55**, 5112 (1997), hep-th/9610043.
3) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B***498**, 467 (1997), hep-th/9612115.
4) A. Connes, M.R. Douglas and A. Schwarz, *JHEP* **9802**, 003 (1998), hep-th/9711162.
5) H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, *Nucl. Phys. B***565**, 176 (2000), hep-th/9908141.
6) N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, *Nucl. Phys. B* **573**, 573 (2000), hep-th/9910004.
7) J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998), hep-th/9711200.
8) S.S. Gubser, IR. Klebanov and A.M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105, hep-th/9802109.
9) E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253, hep-th/9802150.
10) Y. Kitazawa, *JHEP* **0204** (2002) 004, hep-th/0201218; S. Iso, H. Terachi and H. Umetsu, hep-th/0410182.
11) S. Minwalla, M.V. Raamsdonk, N. Seiberg, *JHEP* **0002** (2000) 020, hep-th/9912072.
12) D.J. Gross, A. Hashimoto and N. Itzhaki, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000) 893, hep-th/0012170
13) A. Dhar and Y. Kitazawa, *JHEP* **0102** (2001) 004, hep-th/0012170.
14) A. Dhar and Y. Kitazawa, *JHEP* **0108** (2001) 044, hep-th/0106217.
15) Y. Kitazawa, Y. Takayama and D. Tomino, hep-th/0412312.
16) D.N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148** 175 (2003), ASTRO-PH 0302209.

（きたざわ・よしひさ，高エネルギー加速器研究機構）

IV. ループ量子重力理論への展開

ループ量子宇宙論

辻川 信二

1. はじめに

一般相対論では，時空の構造そのものが動的に変化するという特徴を持ち，そのダイナミクスはEinstein方程式によって記述される．**量子重力理論**は，一般相対論に基づく時空構造に正準量子化を行うことにより構築される理論であり，J. WheelerやB. DeWittらにより1960年代に提唱された．1980年代に入ると，正準量子化に基づくWheeler–DeWitt方程式を用いて宇宙の創成を調べる研究が活発に行われた．特に，宇宙の波動関数の境界条件，宇宙が“無”から生成される確率の計算等で，S. HawkingやA. Vilenkinらの間で様々な議論が展開された．その後，インフレーションモデルの急激な台頭もあり，量子宇宙論は低迷期に入り10年ほどは飛躍的な進展が見られなかった．

ところが近年になって，M. Bojowaldらによって研究が進められてきた**ループ量子重力理論**という新たな量子重力のパラダイムが注目を集めつつある．これにより，従来のWheeler–DeWitt量子化では見られなかった，宇宙初期特異点問題の回避や（スーパー）インフレーション期の存在，そしてループ量子重力効果の観測からの検証可能性といった興味深い結果が得られている．本稿では，ループ量子宇宙論の近年の進展を中心に解説していきたい．

2. 一般相対論と重力の量子化

宇宙初期には，物質のエネルギー密度の量子揺らぎとともに時空の計量の量子揺らぎも大きくなるため，時空を古典的に記述する取り扱いが破綻する．そのため，時空そのものを量子的に扱うような非摂動論的な処方が必要となる．Wheeler, DeWitt, Misnerらによって提唱された量子重力理論では，時空を時間t一定の3次元空間の時系列Σ_tによって分割する(3+1)–分解を行うことにより，重力理論を力学系の理論のように取り扱う．これはいわゆる，Arnowitt–Deser–Misner (ADM)分解に基づく相対論の**ハミルトニアン形式**と呼ばれる手法であり，Einstein方程式を力学的な正準形式の理論に帰着させることが可能となる．そしてその方程式に，正準量子化の手法を施し，重力の量子論ができ上がるという筋書きである．

より具体的には，曲面Σ_t上の計量q_{ab}が位相空間での座標の働きを持ち，その時間微分$\dot{q}_{ab}$がΣ_tの外的曲率K_{ab}と$K_{ab}=-(1/2)\dot{q}_{ab}$の関係を持っており，$q_{ab}$に共役な運動量は，$\pi^{ab}=\sqrt{q}\left(K^{ab}-q^{ab}K^c_c\right)/16\pi G$と表せる（$G$は重力定数）．この$q_{ab}$と$\pi^{ab}$から，粒子系のときと同様の処方で重力系でのハミルトニアンを求めると

$$H_{\mathrm{ADM}}=\int_{\Sigma} d^3x\left(N\mathcal{H}_G+N_i\mathcal{H}^i\right) \qquad (1)$$

となる．ただし，$\mathcal{H}_G=\sqrt{q}(K_{ij}K^{ij}-K^2-{}^3R)$

$/16\pi G, \mathcal{H}^i = -2\pi^{ij}{}_{|j}/16\pi G$ である（^3R は3次元面のスカラー曲率）．N と N_i はそれぞれラプスとシフトと呼ばれる変数で，4次元計量はこれらを用いて，$\mathrm{d}s^2 = (N\mathrm{d}t)^2 - q_{ij}\left(N^i\mathrm{d}t + \mathrm{d}x^i\right)\left(N^j\mathrm{d}t + \mathrm{d}x^j\right)$ と書ける．

q_{ab} の発展方程式（正準方程式）以外に，Einstein 方程式は q_{ab} と π^{ab} に対する拘束条件に相当する式を与え，それらは $\mathcal{H}_G = 0, \mathcal{H}^i = 0$ と書ける．これに状態ベクトル Ψ を施した式

$$\mathcal{H}_G \Psi = 0, \quad \mathcal{H}^i \Psi = 0 \tag{2}$$

が，宇宙の波動関数 Ψ に対する制限を与える．ここで，$\mathcal{H}_G\Psi = 0$ の $\mathcal{H}_G$ は π^{ab} を含むが，これを演算子 $\hat{\pi}^{ab} = -\mathrm{i}\hbar\partial/\partial q_{ab}$ で置き換えることにより正準量子化が行われ，これにより得られる式：$\hat{\mathcal{H}}_G\Psi = 0$ を **Wheeler–DeWitt 方程式**と呼ぶ．具体的に一様等方の Friedmann–Robertson–Walker（FRW）計量

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)[\mathrm{d}r^2/(1-Kr^2) + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta)\mathrm{d}\phi^2] \tag{3}$$

において，スケールファクター a とその共役 $p_a = 3a\dot{a}/8\pi G$ を考え，さらにエネルギー密度 ρ の物質を考える．このとき，古典的な Friedmann 方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{16\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} \tag{4}$$

を正準量子化した Wheeler–DeWitt 方程式は

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{l_\mathrm{P}^4}{9}a^{-1}\frac{\partial}{\partial a}a^{-1}\frac{\partial}{\partial a} + K\right)a\Psi = 8\pi G\hat{H}_\mathrm{M}\Psi \tag{5}$$

である（$l_\mathrm{P} = \sqrt{8\pi G\hbar}$ はプランク長，$\hat{H}_\mathrm{M}$ は物質のハミルトニアン演算子）．実はこの方程式は次数の不定性のため一意ではない．

Wheeler–DeWitt 量子化の問題点の一つは，量子化の後もエネルギー密度は $a=0$ で依然として発散しており，$a=0$ での古典的特異点の他方で起こっていることについて何も予測できないことである．この困難を避けるために，通常は $a=0$ で宇宙が創成され，そこで初期条件が課されるべきであると考える．DeWitt は，$a=0$ での宇宙の存在確率が 0 となるように $\Psi(0)=0$ の条件を課した[1]．しかしながらその後に，このような境界条件の下では一般的に波動関数が至る所で消えてしまうことが分かった．Hartle–Hawking[2] や Vilenkin[3] は，それぞれ異なる観点から境界条件についてのいくつかの提案を行ったが，波動関数は $a=0$ で 0 になっておらず，本質的に特異点を除去することに成功していない．彼らは宇宙の創成の点としての特異点を認めているのである．

もともと量子重力は，古典的に存在する宇宙初期の特異点の重力の量子化による解消を一つの目的として誕生した以上，Wheeler–DeWitt 量子化の上記の性質は満足のいくものではない．Wheeler–DeWitt 量子化は，簡単化された数自由度のモデルで量子力学的なアナロジーを適用したにすぎず，明確な数学的な基盤を持った重力の量子化に対応するものではない．実は，一般相対論を Ashtekar 変数[4]を用いたハミルトニアン形式のアプローチによって構成することにより，ループ量子重力理論という新しい重力の量子論が構築される．ループ量子重力理論は，その幾何学的構造が離散的な特徴を内包しており，それにより宇宙初期の特異点の回避が可能となることが，Bojowald により明らかにされた[5]．次節ではこの理論の基本的な構造について説明していく．

3. ループ量子宇宙論

ループ量子重力理論は，基本的に**トライアド**と呼ばれる量 E_i^a とその正準共役である **Ashtekar 接続** A_a^i という 2 つの Ashtekar 変数を基盤にしている．E_i^a は，$1 \le i \le 3$ でラベル付けされる 3 つのベクトルから成り，それらが直交するという条件を課すことにより，3 次元計量 q_{ab} と

$$q_{ab} = \sqrt{\left|\det E_j^c\right|}\left(E^{-1}\right)_a^i\left(E^{-1}\right)_b^i \tag{6}$$

という関係を持つ．Ashtekar 接続 A_a^i は，スピン

接続 Γ_a^i, 外的曲率 K_a^i, Barbero–Immirzi 変数という正の定数 γ を用いて

$$A_a^i = \Gamma_a^i - \gamma K_a^i \tag{7}$$

と書ける．これとトライアドとの Poisson 括弧をとると

$$\left\{A_a^i(x), E_j^b(y)\right\} = 8\pi\gamma G\delta_a^b\delta_j^i\delta(x,y) \tag{8}$$

という関係を満たしている．Ashtekar 形式は, E_i^a が "電場", A_a^i が "ベクトルポテンシャル" に対応するようなゲージ理論と解釈することができる．すなわち Ashtekar 変数という数学的に新しい道具を用いることで，一般相対論をゲージ理論の形式に帰着させていると考えてもらえばよい．

これらの変数を用いて，一般の時空において重力の量子化を行うのは煩雑を極めるが，時空に対称性があるときには状況は単純化される．例えば前に述べた，宇宙論における FRW 計量 (3) のような一様等方時空の場合，Ashtekar 変数は

$$A_a^i(x)\mathrm{d}x^a = c\omega^i\,, \quad E_i^a\frac{\partial}{\partial x^a} = pX_i \tag{9}$$

のようになる．ただし，ω^i は不変 1–forms で X_i は不変ベクトル場である．ここで c と p は時間 t のみの関数であり，FRW 計量のとき

$$c = (K - \gamma\dot{a})/2\,, \quad |p| = a^2 \tag{10}$$

と表せる．これらを用いると，Friedmann 方程式 (4) に対応するハミルトニアン拘束条件は

$$12\gamma^{-2}\left[c(c-K) + (1+\gamma^2)K^2/4\right]\sqrt{|p|} = 8\pi G H_{\mathrm{M}} \tag{11}$$

となる．

さて次にループ量子化に移項するが，これには Ashtekar 接続から得られる**ホロノミー**：$h_e(A) = \mathcal{P}\exp\int_e A_a^i\dot{e}^a\tau_i\mathrm{d}t$ と，トライアドから得られる**フラックス**：$F_S(E) = \int_S E_i^a n_a\tau^i\mathrm{d}^2y$ という 2 つの量が本質的に重要な役割を果たす．ここで，τ_i は Pauli 行列，$\dot{e}^a$ はエッジ e に対する tangent ベクトル，n_a は面 S にコノーマルなベクトルである．これらは関数空間上で，演算子として Poisson 代数を満たしており，しかもその代数表現は一意的に決まる共変的なものである．Wheeler–DeWitt 量子化では，Ashtekar 接続と関係している外的曲率を演算子として取り扱うが，ループ量子化では Ashtekar 接続そのものではなく，無限次元の Hilbert 空間上で well-defined なホロノミーを演算子として用いるのである．フラックスは，Ashtekar 接続の共役から構成されるため微分演算子として作用し，与えられた量子状態を表現するすべての曲線とフラックスの表面の間の交叉数をカウントする演算子に対応する．そしてこのフラックス演算子の期待値は離散的であり，フラックスが，長さ，面，体積といった幾何学的な量と関係するトライアドから構成されることから，時空の幾何学的構造が離散的な特徴を持つ．

具体的に FRW 時空 (3) において，状態 $|n\rangle$ に作用するフラックス演算子は

$$\hat{p}|n\rangle = (1/6)\gamma l_{\mathrm{P}}^2 n|n\rangle \tag{12}$$

となる．ここで n は上で述べた交叉数に関連し，これはスペクトラムが離散的であることを示す．スケールファクター演算子 $\hat{a}$ は，$\hat{p}$ と $\hat{a} = \sqrt{|\hat{p}|}$ の関係にあるためこれも離散的となり，連続的な構造を持つ Wheeler–DeWitt 量子化と異なっている．また，Wheeler–DeWitt 量子化では外部曲率と関係する c が演算子として作用するが，ループ量子化ではその代わりにホロノミー演算子

$$h_i(c) = e^{c\tau_i} = \cos(c/2) + 2\tau_i\sin(c/2) \tag{13}$$

が用いられる．ループ量子重力においては，ホロノミー演算子が $n=0$ で n に関して連続的でないために，c–演算子が導出されないのである．

そのため，拘束条件 (11) はホロノミー演算子を用いて間接的に量子化される必要がある．これによって得られる量子化された Friedmann 方程式は，Wheller–DeWitt 方程式と異なり次のような差分方程式の形をとる[6)]：

$$\begin{aligned}&(V_{n+5} - V_{n+3})e^{\mathrm{i}K}\Psi_{n+4} - (2+\gamma^2K^2)\\&\times(V_{n+1} - V_{n-1})\Psi_n + (V_{n-3} - V_{n-5})e^{-\mathrm{i}K}\Psi_{n-4}\\&= -(4/3)\pi\gamma^3 G l_{\mathrm{P}}^2\hat{H}_{\mathrm{M}}(n)\Psi_n\,.\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，$V_n = (\gamma l_{\rm P}^2 |n|/6)^{3/2}$ である．この方程式は，古典的な特異点 $n=0$ でも有効であり，正の n から負の n へと変化することが可能である．ループ量子重力の効果が顕著に表れるのは，n が0に近い小体積の領域であり，ハミルトニアンは $n=0$ で $\hat{H}_{\rm M}(0)=0$ を満たす．逆に体積の大きい領域（$n \gg 1$）において，離散的な波動関数を連続的なものに読み替えることにより，上記の差分方程式から式 (5) の Wheeler–DeWitt 方程式が再現されることが示されている[7]．

次に古典的には $a=0$ で発散する量 a^{-3} の量子化を行う．この量は，Ashtekar 接続とフラックスを用いてまず $a^{-3} = [3(8\pi\gamma Gl)^{-1}\{c, |p|^l\}]^{3/(2-2l)}$ と書ける．今は $0<l<1$ のときを考えており，文献8) の手法を用いると $l=3/4$ である．Ashtekar 接続をホロノミーで書き直せばループ量子化を行うことができ，演算子 $\widehat{a^{-3}}$ の固有値を得る：

$$(\widehat{a^{-3}})_n^{(j,l)} = \left(\frac{9}{\gamma l_{\rm P}^2 lj(j+1)(2j+1)}\sum_{m=-j}^{j} m|p_{n+2m}|^l\right)^{\frac{3}{2-2l}}. \tag{15}$$

ただし，$p_n = \gamma l_{\rm P}^2 n/6$ である．ここで j は反整数であり，大きな j の場合（$j \gg 1$），上の固有値は

$$(a^{-3})_{\rm eff}^{(j,l)}(a) \equiv (\widehat{a^{-3}})_{n(a^2)}^{(j,l)} = a^{-3} f_l\left(a^2/a_*^2\right)^{3/(2-2l)} \tag{16}$$

と近似される．ただし，$a_* = \sqrt{\gamma j/3}\, l_{\rm P}$，

$$f_l(q) = 3/(2l) q^{1-l}\{(l+2)^{-1}[(q+1)^{l+2} - |q-1|^{l+2}] - (l+1)^{-1}q[(q+1)^{l+1} - {\rm sgn}(q-1)|q-1|^{l+1}]\} \tag{17}$$

である．

関数 $f_l(q)$ は，$q = a^2/a_*^2 \gg 1$ で $f_l(q) \to 1$ であるため，$(a^{-3})_{\rm eff}^{(j,l)}(a) \to a^{-3}$ となり，これは古典的な振舞いに他ならない．その一方で，$q \ll 1$ で $f_l(q) \sim q^{2-l}$ であることから，$a \ll a_*$ において式 (16) の固有値は

$$(a^{-3})_{\rm eff}^{(j,l)} \sim a^{3/(1-l)} \tag{18}$$

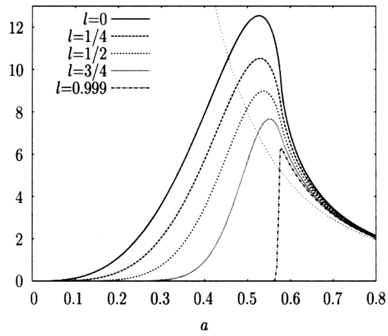


図1 $(a^{-3})_{\rm eff}(a)$ の a に対する依存性（a は $\sqrt{\gamma j}\, l_{\rm P}$ で規格化している）．点線は古典的な場合で $a \to 0$ で発散している．

となる．このことから，$0<l<1$ のとき，$a \to 0$ でも $(a^{-3})_{\rm eff}^{(j,l)}$ は発散していないことが分かる（図1を参照）．この性質により，古典的な特異点を回避してその前の負時間での解を探ることができる．負時間でのブランチ解は，小さな体積へと収縮し体積が0の領域に到達する．その後，宇宙は特異点を経ることなくバウンスし，正時間の膨張宇宙の領域に移行する．ループ量子化では，エネルギー密度も $a=0$ で発散せず，特異点のない宇宙論解が構築されるのである．さらに興味深いことに，$a \ll a_*$ の領域において宇宙は，物質場のポテンシャルの有無によらずインフレーション的な膨張を起こす．次節では，ループ量子宇宙論に基づくインフレーションについて解説する．

4. ループ量子宇宙論とインフレーション

ループ量子化では，固有値 $a_{\rm eff}^{-3}$ が古典的な値と異なるため物質場 ϕ のハミルトニアンも異なり，場のポテンシャルを $V(\phi)$ として，FRW 計量で

$$H_{\rm M} = \frac{1}{2}(a^{-3})_{\rm eff}\, p_\phi^2 + a^3 V(\phi) \tag{19}$$

という形をとる．ただし，$p_\phi = \dot{\phi}/(a^{-3})_{\rm eff}$ である．今後の解析においては $l=3/4$, $K=0$ のときを考え，$D = f_l(a^2/a_*^2)^{3/(2-2l)}$ と表記する．これにより実効的な Friedmann 方程式

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2D}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] \quad (20)$$

が得られ，また物質場の運動方程式は

$$\ddot{\phi} + \left(3H - \frac{\dot{D}}{D}\right)\dot{\phi} + D\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}(\phi) = 0 \quad (21)$$

となる．

式 (18) から，$l = 3/4$ のとき $a \ll a_*$ において，D は $D \propto a^{15}$ という依存性を持つ．したがって式 (21) は，近似的に $\ddot{\phi} - 12H\dot{\phi} \simeq 0$ となり，ポテンシャル項がほとんど効かず，第 2 項が反摩擦項のように効き，ϕ がポテンシャルに沿って登っていくという現象が起こる[9]．実際にこの式を積分すると，$\dot{\phi} \propto a^{12}$ であり，$a \ll a_*$ では a とともに $\dot{\phi}$ が増加する．また，式 (20) と (21) から，宇宙の膨張率 H の時間微分についての式

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2 \frac{1}{D}\left(1 - \frac{\dot{D}}{6HD}\right) \quad (22)$$

が得られる．$a \ll a_*$ のとき，$\dot{D}/(HD) = 15$ であるから

$$\dot{H} \approx 6\pi G\dot{\phi}^2/D > 0 \quad (23)$$

となり，H は増加する．このような H の振舞いは**スーパーインフレーション**と呼ばれ，ループ量子化の効果でこのような興味深い現象が生じる．

もちろん a が増えるのに伴い，a_{eff}^{-3} は次第に古典的な値 a^{-3} に近づき，スーパーインフレーション期は a が $a_* = \sqrt{\gamma j/3}l_{\mathrm{P}}$ 程度の大きさになると終了する．その後は通常の古典的な Friedmann 宇宙につながっていく．現代の宇宙論では，宇宙初期のインフレーションは，平坦性問題や地平線問題といった標準ビッグバン理論では説明がつかない問題を解決するために必要とされている．そのために必要なインフレーションの程度は，インフレーションの始まりと終わりのスケールファクターをそれぞれ a_i, a_f として，その log 比：$N_e = \log(a_f/a_i)$（e–folding 数と言う）が 60 から 70 以上とされている[10]．実は上記のループ量子重力によるスーパーインフレーションでは，その条件を満たすような充分なインフレーションを起こすことは難しい．

しかしこの問題は，ϕ 場のポテンシャルを考えることにより改善される．例としてカオティックインフレーションと呼ばれるタイプのポテンシャル

$$V(\phi) = (1/2)m_\phi^2\phi^2 \quad (24)$$

を考えてみよう．スカラー場 ϕ は初期にポテンシャルの底付近にあるとする．すると，$a \ll a_*$ ではスカラー場は $\dot{\phi} \propto a^{12}$ に従ってポテンシャルに沿い上昇するが，a が a_* に近づくとその勢いは衰え始める．$a > a_*$ となると系は古典的に振る舞うようになり，ポテンシャルの坂を登っていたスカラー場はやがて静止し，今度はポテンシャルを下り始める．このスカラー場の下降運動により，**スローロールインフレーション**と通常呼ばれる 2 回目のインフレーションが起こる．e–folding 数が 60 を超えるためには，スカラー場がいったん静止したときの ϕ の値 ϕ_{max} がおよそ $3m_{\mathrm{P}}$（ただし m_{P} はプランク質量）を超えていればよい．これが実現するかは，最初のスーパーインフレーション期に ϕ がどの程度ポテンシャルを駆け上がることができるかによる．

スカラー場がポテンシャルの底にあるとき，場は量子揺らぎに起因する不確定性を持つ．初期条件として，不確定性原理：$|\Delta\phi_i \Delta p_{\phi i}| \gtrsim 1$ を満たすものを考えると，ϕ_i と $\dot{\phi}_i$ は

$$|\phi_i\dot{\phi}_i| \gtrsim \frac{10^3}{j^{3/2}}\left(\frac{a_i}{a_*}\right)^{12} m_{\mathrm{P}} \quad (25)$$

という制約を受ける．文献 11) では，式 (25) を満たす初期条件の下で，ϕ, a, H の時間発展が数値的に調べられている．例として図 2 に，$\dot{\phi}_i/(m_\phi m_{\mathrm{P}}) = 2$, $\phi_i/m_{\mathrm{P}} \sim 10^{12}j^{-15/2}$, $a_i = \sqrt{\gamma}l_{\mathrm{P}}$ の場合の時間変化を示す．最初は確かに，H が増加するスーパーインフレーションが起こっており，H が最大値に達した後もスカラー場はしばらくポテンシャルを上昇していく．ϕ のピークの値 ϕ_{max} は j の値に依存し，一般に j の値が大きいほど ϕ_{max} は大きくなる．これは，j の増加に伴い $q = a^2/a_*^2$ と a_{eff}^{-3} が減少し，これにより H と $\ddot{\phi}$ が増加するためである．図 2 の初期条件の下では，$j \gtrsim 100$ のとき $\phi_{\mathrm{max}} > 3m_{\mathrm{P}}$ が満たされ，e–folding 数が

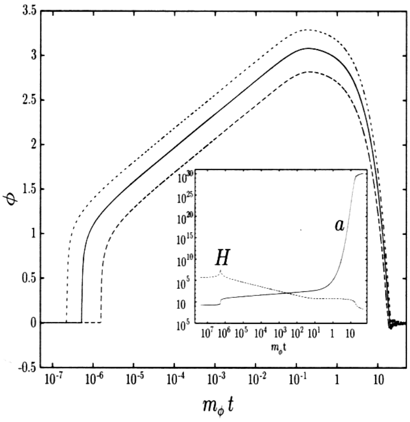


図 2 スカラー場 ϕ（m_P で規格化）および，スケールファクター a とハッブルパラメータ H の時間変化の例（内側の図も参照）．3 つのカーブはそれぞれ上から，$j = 125$, 100, 75 のときに対応する．文献 11) より抜粋．

60 を超えるような 2 回目のインフレーションが起こることが分かる．このインフレーションが終わると宇宙は再加熱期に入り，熱化のプロセスの後，標準的なビッグバン宇宙につながるというシナリオである．

もちろん，$\dot{\phi}$ の初期条件が図 2 のときと変わればそれに応じて ϕ_max も異なるが，文献 11) では広い範囲の初期条件と j の値（$j \gtrsim 100$）に対して，$\phi_\mathrm{max} > 3m_\mathrm{P}$ が満たされることが示されている．つまりループ量子重力の効果によって，インフレーションに対する自然な初期条件が与えられるのである．このスローロールインフレーションが予測する密度揺らぎは，WMAP グループらによって観測された**宇宙背景輻射の温度揺らぎ**と良い一致を見せている[12]．スローロール期の前に，ループ量子重力の効果に起因するスローロールではない時期が存在することから，ループ量子重力の徴候を観測的にとらえることができるのではないかという興味深い疑問が生じる．大スケールの温度揺らぎには，抑制されたスペクトラムやそのスペクトラル指数のスケールによる変化といった特徴が観測されており[12]，これは通常のスローロールインフレーションだけで説明するのは容易でない．次節では，ループ量子重力の効果からの間接的な帰結である，大スケールでの密度揺らぎの，通常の解析からの変更について議論し，その観測との比較を行う．

5. 宇宙背景輻射とループ量子宇宙論

スローロールインフレーションに基づく密度揺らぎの計算はよく確立されており，それによれば揺らぎのスペクトラムはスケール不変に近いものとなる[10]．より具体的には，共動的な波数を k，曲率揺らぎを $\mathcal{R}$，スペクトラル指数を $n_\mathcal{R}$ として，揺らぎのパワースペクトラム $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ は

$$\mathcal{P}_\mathcal{R} \propto k^{n_\mathcal{R}-1} \tag{26}$$

という k 依存性を持つ．揺らぎの波長 a/k がハッブル半径 H^{-1} をインフレーション中に横切った後，再びハッブル半径 H^{-1} に入るまで，揺らぎは上記の値で凍結する．ここでスケール不変なスペクトラムは $n_\mathcal{R} = 1$ に対応する．ポテンシャル (24) に対して，スペクトラル指数は

$$n_\mathcal{R} \approx 1 - \left(m_\mathrm{P}/\sqrt{\pi}\phi\right)^2 \tag{27}$$

となる[10]．

ループ量子宇宙論に基づくインフレーションでは，スカラー場はポテンシャルを登った後，$\dot{\phi} = 0$ で向きを変える．実は，$\dot{\phi} = 0$ 付近では揺らぎのスペクトラムの計算にスローロール近似が使えないのであるが，この場合のスペクトラムは

$$\mathcal{P}_\mathcal{R} \approx \frac{9H^6}{(\mathrm{d}V/\mathrm{d}\phi)^2} \approx \frac{9H^6}{m_\phi^4 \phi^2} \tag{28}$$

で与えられることが，文献 13) で示されている．式 (28) に対応するスペクトラル指数は

$$n_\mathcal{R} = 1 + \frac{1}{1+\epsilon}\left(6\epsilon - \frac{2\dot{\phi}}{H\phi}\right) \tag{29}$$

となる．ただし，$\epsilon = \dot{H}/H^2$ である．式 (22) より，$\dot{\phi} = 0$ で $\epsilon = 0$ であるから，場の転回点で $n_\mathcal{R} = 1$ となる．

もし転回点での場の値 ϕ_max が $3m_\mathrm{P}$ 程度である

と，インフレーションの終わりから60 e–foldings 程度前にハッブル半径を横切った揺らぎに対して，スペクトラル指数 $n_{\mathcal{R}}$ が (27) から (29) に変化する．具体的には，スペクトラル指数のスケール依存性の指標であるランニング α を，$\alpha = \mathrm{d}n_{\mathcal{R}}/\mathrm{d}\ln k$ で定義したとき，α が場の転回点付近で急激に変化する．通常のスローロールインフレーションでは，式 (27) より $\phi = 3m_{\mathrm{P}}$ において，$n_{\mathcal{R}} = 0.964$, $\alpha = -0.005$ 程度であるが，ϕ_{max} が $3m_{\mathrm{P}}$ 程度のとき，$\dot{\phi} = 0$ 付近で $\alpha = -0.06$ 程度の比較的強いランニングが得られる．WMAP の 1 年目の観測データでは，$k \sim 10^{-3}\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ 程度のスケール（これは図 3 で $\tilde{l} \sim 10$ に相当）でランニングは $\alpha = -0.077^{+0.050}_{-0.052}$ であり，ループ量子重力の間接的な効果で $\dot{\phi} = 0$ の転回点がある場合のほうが，観測に矛盾しない結果が得られることが分かる．

図 3 に，我々のシナリオにおける宇宙背景輻射の温度揺らぎのスペクトラム（実線）を示す．なお，黒点は WMAP の 1 年目の観測データを表す．横軸は多重極展開の $\tilde{l}$ に対応し，$\tilde{l}$ が小さいほど大スケールに対応する．ここでは，$k \le k_0 = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ の大スケールに対していくつかのランニング $\bar{\alpha}$ を考え，$k \ge k_0$ ではスローロールインフレーションによるスペクトラムを考えている．これから，ランニングの絶対値が大きくなるにつれて，大スケールでのスペクトラムが抑えられていることが分かる．$\tilde{l} = 2, 3$ での強く抑制された揺らぎを説明するのは $|\alpha|$ がよほど大きくないと難しいが，ループ量子重力の効果を間接的に，観測を通して探ることができるのは興味深い．

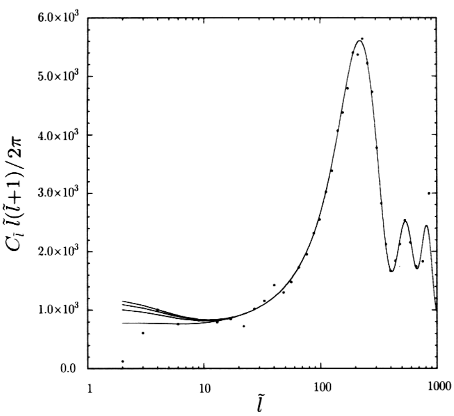


図 3　宇宙背景輻射の温度揺らぎ．4 つのカーブは上からそれぞれ，(i) 通常のカオティックインフレーション，(ii) $k \le k_0 = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ で $\bar{\alpha} = -0.04$，(iii) $k \le k_0$ で $\bar{\alpha} = -0.1$，(iv) $k \le k_0$ で $\bar{\alpha} = -0.3$ のときに対応する．文献 11) より抜粋．

上で述べた密度揺らぎの計算は摂動論によるものであり，$a < a_*$ でループ量子重力の効果が強く効く領域では，もちろん非摂動論的な取り扱いが必要となる．より直接的に量子重力の効果を引き出すためには，この時期に生成される揺らぎのスペクトラムの計算が不可欠であり，これと観測結果を比較してこそループ量子重力の神髄に迫ることができると言えるだろう．この研究は現在進行中であり，今後の観測の更なる進歩とも相まって，宇宙初期の物理現象および重力の量子化の本質が明らかになることを期待したい．

参考文献

1) B.S. Dewitt, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113.
2) J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983).
3) A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30** (1984) 509.
4) A. Ashtekar, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 1587.
5) M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5227 (2001).
6) M. Bojowald, *Class. Quant. Grav.* **19**, 2717 (2002).
7) M. Bojowald, *Class. Quant. Grav.* **18**, L109 (2001).
8) T. Thiemann, *Class. Quant. Grav.* **15**, 1281 (1998).
9) M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 261301 (2002); M. Bojowald and K. Vandersloot, *Phys. Rev. D* **67**, 124023 (2003).
10) A.R. Liddle and D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press (2000).
11) S. Tsujikawa, P. Singh and R. Maartens, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5767 (2004).
12) H.V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 213 (2003).
13) O. Seto, J. Yokoyama and H. Kodama, *Phys. Rev. D* **61**, 103504 (2000).

（つじかわ・しんじ，東京理科大学理学部）

面積量子化とブラックホール

玉置 孝至

1. 始めに

原子等を記述する量子力学では，物理量の量子化が重要な役割を果たす．さらに極微，物質のコンプトン波長とシュワルツシルト半径が同程度になるプランクスケールでは，重力と量子力学を同時に考える必要があり，面積や体積という構造そのものが量子化される可能性がある．しかし，このような構造を検証するのは非常に困難であり，理論的に多角的なアプローチが必要である．重要な役割を果たすと思われるのがブラックホールであり，次の熱力学と類似した法則を持つ．ここで，κ, A はそれぞれ，事象の地平面の表面重力，面積を意味する．また，PdV に相当する項には，ブラックホールの角運動量や電荷に関する量が入る．

	熱力学	ブラックホール
第零	熱平衡で $T=$ 一定	定常で $\kappa=$ 一定
第一	$dE = TdS - PdV$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \cdots$
第二	S 増大則	A 増大則
第三	有限の物理過程で T を0にできない	有限の物理過程で κ を0にできない

これを見ると，温度 T と表面重力 κ，エントロピー S と表面積 A の間に深い関係があるのではないかと想像される．実際，ホーキングによってブラックホールが熱的な輻射をし，表面重力と結び付いた温度 $T_{\mathrm{BH}} = \frac{\kappa}{2\pi}$ を持つことがわかった．ブラックホールのエントロピーを

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4} \tag{1}$$

と見なせば両者は対応する．そうすると，熱力学が統計力学によって，原理的に説明されたように，ブラックホール熱力学も統計力学的に説明されるのではないかと考えたくなる．ここでは，量子重力理論の候補であるループ量子重力理論による面積量子化，統計力学的説明の試み，これらとブラックホール準固有振動の関連について説明する．単位系は自然単位系 $c = G = \hbar = 1$ を用いる．

2. 準固有振動による地平面の量子化

次の単純な考察から始める．面積が単純に等間隔で離散化されていると仮定し，

$$A(n) = \alpha n \quad (\alpha: 未定定数,\ n = 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

統計力学との類推から地平面の状態数を $g_n = \exp(\frac{A(n)}{4})$ とする．g_n は n 番目の面積固有値の縮退度を表し，すべての n に対し，g_n が整数であってほしいので[1]，

$$\alpha = 4 \ln k \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

これと，$k = 3$ のとき，矛盾しない値を示し，ループ量子重力とも関連すると言われているのが，ブラックホール準固有振動を用いた面積量子化の

方法である[2]．これは，ブラックホール時空の摂動から得られ，摂動方程式は時間依存性を $e^{-i\omega t}$ として次のシュレディンガー型方程式に従う．

$$\frac{d^2\psi}{dr^{*2}} + [\omega^2 - V(r)]\psi = 0. \quad (4)$$

ここで r^* は亀座標で，地平面付近の様子を見るのに適す[3]．量子力学の井戸型ポテンシャル中の波動関数が，離散的な振動数の解を持つのと同様，ブラックホール時空の摂動は，離散的な固有の揺れのモードを持つ．これを

$$\omega(n) = \omega_{\rm R}(n) - i\omega_{\rm I}(n) \quad (5)$$

（n はモード数）のように書くと，$\omega_{\rm I}$ は近似的に n に比例し，$\omega_{\rm I}(\infty) \to \infty$ である．このため，ブラックホールが元の状態に戻る目安となる緩和時間 $\omega_{\rm I}^{-1}$ は同じ極限で 0 に近づく．単純には，ブラックホールからより小さなエネルギーを取り出すのにかかる時間は，より短くてすむと思われるため，これを基に，**この極限での振動数 $\omega_{\rm R}$ から決まるエネルギーが，取り得る質量変化 dM の最小値**，と予想する．シュワルツシルトブラックホールの場合，この極限で[4]

$$\omega(n) = T_{\rm BH}\ln 3\left[1 - 2\pi i\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (6)$$

一方，第一法則から $dA = \frac{4}{T_{\rm BH}}dM$ なので，

$$dA = 4\ln 3. \quad (7)$$

これは (3) の $k=3$ に相当する．次に関連が議論されているループ量子重力について説明しよう．

3. ループ量子重力理論

変数の書き換え

まず一般相対論の基本変数を，計量からゲージ理論のポテンシャルに対応するものに移し，見通しの改善を図る．四脚場 e^a_μ を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e^a_\mu e^b_\nu \quad (8)$$

のように導入する．η_{ab} はローレンツ計量であり，時空の各点に e^a_μ を局所ローレンツ枠とする内部空間が張り付いていると考える．スピン接続 $\omega^{ab}_\mu := e^a_\nu\nabla_\mu e^{b\nu}$ を導入すると，これは局所ローレンツ系の変換に対して，ゲージポテンシャルと同じ変換性を持っている．また，内部空間の添字に対しては反対称 $\omega^{ab}_\mu = -\omega^{ba}_\mu$ のため，独立な自由度は 6 つである．双対変換 $*\omega^{ab}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}{}_{cd}\omega^{cd}_\mu$ を使って，

$$A^{ab}_\mu := \frac{1}{2}(\omega^{ab}_\mu + \gamma * \omega^{ab}_\mu) \quad (9)$$

（γ はパラメーター）を定義する．この独立な自由度は 3 つである．そこで，

$$A^I_\mu := 2A^{0I}_\mu \quad (I = 1,2,3) \quad (10)$$

とし，この空間成分 A^I_i $(i = 1,2,3)$ とその共役な運動量 E^i_I を基本変数と考える．内部添字にのみ着目すると，

$$A^I = \omega^{0I} + \frac{\gamma}{2}\epsilon^{IJK}\omega^{JK}. \quad (11)$$

γ のかかる項は空間回転 $SO(3)$，かからない項はローレンツブーストを表す．また，E^i_I は三脚場の密度量 $\tilde{e}^i_I := \sqrt{g^{(3)}}e^i_I$ に比例し，

$$E^i_I = \frac{\tilde{e}^i_I}{8\pi\gamma}. \quad (12)$$

量子化とウィルソンループ

一般相対論を正準形式で書き直したとき，ハミルトニアン拘束条件 $H(A,E) = 0$，運動量拘束条件 $H_i(A,E) = 0$，内部空間のゲージに対する拘束条件 $C_I(A,E) = 0$ が現れる．基本変数 (A,E) を演算子に置き換え，量子状態 $\varPsi$ に対する条件，例えば，$\hat{H}(\hat{A},\hat{E})\varPsi = 0$ を考える．

拘束条件を解くことを考える．ゲージ拘束条件から量子状態 $\varPsi$ としてゲージ不変な汎関数を持って来るべきである．このような汎関数にウィルソンループと呼ばれるものがある．これはホロノミー

$$H(\alpha) := P\exp\left(\oint_\alpha A^I_i\tau^I dx^i\right) := \lim_{N\to\infty}\prod_{k=0}^{N}\left(1 + A^I_i(x^i(k))\tau^I\varDelta x^i(k)\right) \quad (13)$$

（$\tau^I = -\frac{i}{2}\sigma^I, \sigma^I$ はパウリ行列．$x^i(k)$ は α を N

個に分割して，経路順に並べた点）を用いて

$$W(A,\alpha) := \mathrm{Tr}\,[H(\alpha)] \tag{14}$$

で定義される．ホロノミーの定義に戻って，様々なループ α を頭に描いてみよう．こうして様々なループ α を考えることでどの程度ゲージ場の情報を引き出せるのだろうか．これは重要な点で，ウィルソンループ自体は残りの拘束条件を満たさないが，**ゲージ不変な汎関数はウィルソンループの組み合わせで表せる**ため，次のループ表示の波動関数，あるいはその和を使ってすべての拘束条件を満たそう，というのが基本的な発想である[5]．

$$\Psi(\alpha) := \int dA W(A,\alpha)\Psi(A). \tag{15}$$

物理量演算子 $\hat{P}$ の作用は

$$\begin{aligned}\hat{P}\Psi(\alpha) &:= \int dA W(A,\alpha)\hat{P}\Psi(A)\\ &= \int dA\hat{P}^{*}W(A,\alpha)\Psi(A)\end{aligned} \tag{16}$$

で定義される．$\hat{P}^{*}$ は $\hat{P}$ とは逆の演算子順序である．次節以降こういった物理量の性質を見ていく．

4. 準古典極限の問題

計量の固有値について考える．$g^{(3)}g^{ij} = (8\pi\gamma)^2E^i_IE^j_I$ と表せるので，これを演算子にした $\frac{\delta}{\delta A^I_i}\frac{\delta}{\delta A^I_j}$ の $W(A,\alpha)$ への作用を考えるのだが，ループ α に接する方向にのみデルタ関数的に値を持ち，それ以外の所では0である．言うならば，$W(A,\alpha)$ は**縮退した計量からの励起状態**を与え，これらの重ね合わせで，励起状態として平坦な時空その他を考えることになる．これは実は難問で，**準古典極限の問題**と呼ばれる．

計量を表すものとして，正則化に対し，きちんと定義される演算子が提唱されている[6]．

$$Q(w) = 8\pi\gamma\int d^3x\sqrt{w_iw_jE^i_IE^j_I} \tag{17}$$

がその古典論版，w は任意の滑らかな 1–form である．以下では正則化の過程を省き，$\frac{\delta}{\delta A^I_i}\frac{\delta}{\delta A^I_j}W(A,\alpha)$ を見るに留める．まず，開いた経路 $\alpha^{o'}_o$ を考え，y を $\alpha^{o'}_o$ 上の点として（図1）

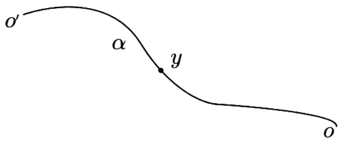


図1 $W(A,\alpha)$ の経路 $\alpha^{o'}_o$.

$$\frac{\delta H(\alpha^{o'}_o)}{\delta A^I_j(x)} = \int_\alpha dy^j\delta(x-y)H(\alpha^y_o)\tau^I H(\alpha^{o'}_y)$$

と書けることに注意する．これは定義 (13) に戻ると直観的に理解できる．繰り返し作用させると，デルタ関数の積 $\delta(x-y)\delta(x-z)$ が現れる．o と o' を結び，トレースを取ると，最終的に，

$$\begin{aligned}&w_i(x)w_j(x)\frac{\delta}{\delta A^I_i(x)}\frac{\delta}{\delta A^I_j(x)}W(\alpha)\\ &= \oint_\alpha dy^j\oint_\alpha dz^i\,\frac{3}{4}\delta(x-y)\delta(x-z)\\ &\quad\times w_i(x)w_j(x)W(\alpha)\end{aligned} \tag{18}$$

が得られる．したがって

$$\hat{Q}(w)\Psi(\alpha) = 4\pi\sqrt{3}\gamma\oint_\alpha |dx^iw_i(x)|\Psi(\alpha). \tag{19}$$

上記の演算子を用いて平坦な時空

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{20}$$

を模倣する波動関数を求める[7]．このときは

$$E^i_I = \frac{1}{8\pi\gamma}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{21}$$

で，演算子を作用させた結果として得られる $4\pi\sqrt{3}\gamma\oint_\alpha|dx^iw_i(x)|$ が，古典的な (17) からの $8\pi\gamma\int d^3xw_iE^i_I(x)$ と等しい波動関数を求めるのである．様々な方法があるが，α を3つの要素 $\Delta^i_I(s)$（$I=1,2,3$, s はパラメーター）に分割し，E^i_I の内部添字と対応させる方法を述べる．まず，$I=1$ のケースに着目する．

$$4\pi\sqrt{3}\gamma\oint_{\Delta^i_1} ds\dot{\Delta}^i_1w_i = \int d^3xw_i\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{22}$$

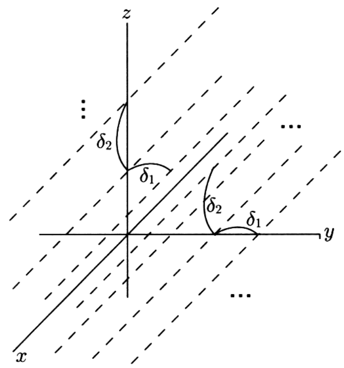


図 2　x 方向に伸びる "棒".

ここで, $\dot{} = d/ds$ である. $\dot{\Delta}_1^i$ には y, z 成分が必要ないことがわかる. そこで,

$$\Delta_1^i(s) = \sum_{n_1,n_2} \begin{pmatrix} s \\ n_1\delta_1 \\ n_2\delta_2 \end{pmatrix}$$

と置く. n_1, n_2 は整数である. x 方向に伸びる "棒" が, y, z 方向にそれぞれ δ_1, δ_2 の間隔で並んでいる様子を想像すればよい (図 2).

n_1, n_2 を連続変数のように考えて, (22) の右辺を $(x, y, z) \to (s, n_1, n_2)$ に変数変換すると,

$$\delta_1\delta_2 \sum_{n_1,n_2} \int_{-\infty}^{\infty} ds w_i(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

で, (22) が満たされるには $\delta_1\delta_2 = 4\pi\sqrt{3}\gamma$ である. $I = 2, 3$ の場合はそれぞれ y, z 方向に伸びている "棒" を想像すれば良く, プランクスケール間隔の格子的な描像が得られる. これ以外でも様々な時空について同様な考察がなされている.

こう書くと, ある程度は描像ができていると思われるかも知れないが, 問題点は色々ある. 例えば, 平坦な時空には特別な方向がないはずだが, 今の描像では特別な方向を作ってしまっている. そのため, 様々な方向を向いた格子をたくさん用意し, その平均を取る操作をする等の試みがある[8).

5. 面積公式とスピンネットワーク

面積は古典論では

$$A(\Delta) = \int_\Delta d^2\sigma\sqrt{h}. \qquad (24)$$

のように書ける. h は 2 次元面 Δ 上の計量の行列式である. これを E_I^i を用いて書き直すと,

$$A(\Delta) = 8\pi\gamma \int_\Delta d^2\sigma\sqrt{E_I^i E_I^j n_i n_j}. \qquad (25)$$

n_j は Δ に対する法線ベクトル (図 3).

量子論では $\hat{Q}$ と同様に (18) の計算をする必要があるが, 最終的に積分が 2 次元面なので,

$$\hat{A}(\Delta)\Psi(\alpha) = 4\pi\sqrt{3}\gamma(\alpha と \Delta の交点数)\Psi \quad (26)$$

のように書ける. 複数のループを考える場合には, 単純に交点数の和を考えればよいと思うかも知れない. しかし, 実際には

$$\mathrm{Tr}(C)\mathrm{Tr}(D) - \mathrm{Tr}(CD) - \mathrm{Tr}(CD^{-1}) = 0$$

$\forall C, D \in SL(2, \mathbf{C})$ という恒等式のために単純ではない. この C, D として, それぞれループ α, β についてのホロノミーを考えれば,

$$W(\alpha \cup \beta) - W(\alpha\beta) - W(\alpha\beta^{-1}) = 0. \qquad (27)$$

ここで, $W(\alpha \cup \beta) := W(\alpha)W(\beta)$ である. これと任意の経路 χ に関する恒等式 $W(\alpha\chi\chi^{-1}) = W(\alpha)$ を組み合わせ, 波動関数の形 (15) を用いると

$$\Psi(\alpha \cup \beta) - \Psi(\alpha\chi\beta\chi^{-1}) - \Psi(\alpha\chi\beta^{-1}\chi^{-1}) = 0 \qquad (28)$$

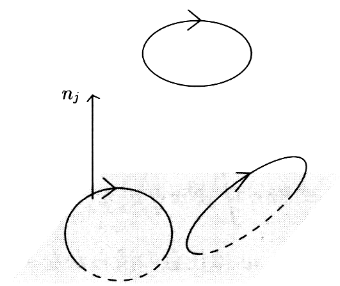


図 3　2 次元面とループ.

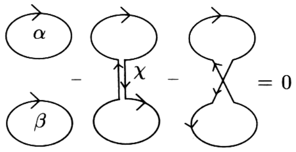


図 4　ループ同士の関係式.

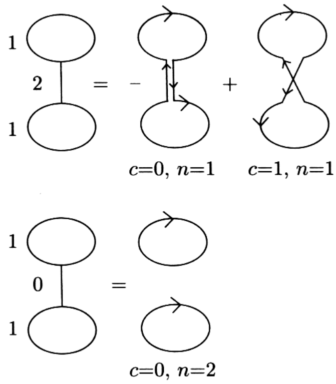


図 5　スピンネットワーク.

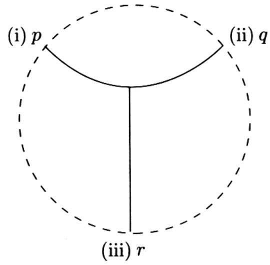


図 6　バーテックス近傍.

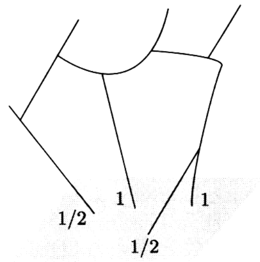


図 7　スピンネットワークと面積.

を得る．これは模式的に図 4 のように書け，これら 3 つが独立ではないことを示している．

そのため，独立な基底を取り出す必要がある．次のように選んだものはスピンネットワーク基底と呼ばれる[9]．

$$\Psi_s := \sum_m (-1)^{c(m)}(-1)^{n(m)}\Psi_m. \tag{29}$$

Ψ_m は図 4 で表される個々のものに対応しており，任意個数のループとそれらを結ぶ経路から成る．$c(m)$, $n(m)$ はそれぞれループの向きの交換の数，ループの数を表す．例えば $\Psi(\alpha \cup \beta)$ ならループの数は 2，交換は 0，$\Psi(\alpha\chi\beta^{-1}\chi^{-1})$ ならループの数は 1，交換は 1 である．

Ψ_s を表現するため，**スピンネットワーク**という表記法を与える．図 5 のように円とそれらを結ぶ線を書き，ループあるいは経路の重複度を表す数字を横に書く．これらの線と交点は総称してそれぞれ**エッジ**，**バーテックス**と呼ばれている．例えば図 5 の左上では円を結ぶ線の重複度は 2 であり，円の結び方には右辺のように 2 つあるループを順方向，逆方向に繋げる方法がある．これに応じて $c(m)$, $n(m)$ が求まる．左下の場合も同様であり，この図の左辺で定義される 2 つは図 4 と対比すると確かに独立なものになっている．ここで注意が必要だが，線に対して重複度 1 を付けたものは，もともとの恒等式にないため，現れない．

この重複度を制限するルールを考える．図 6 はバーテックス周辺を拡大した図で，(i)(ii)(iii) に対応するループの重複度をそれぞれ p, q, r とする．(i)(ii), (ii)(iii), (iii)(i) を結ぶループの本数をそれぞれ a, b, c 本とすれば，$p = c + a$, $q = a + b$, $r = b + c$ という条件が付く．このため，p, q, r について，『総和は偶数，どれも他の 2 つの和より大きくない』．したがって，$j_p = p/2$, $j_q = q/2$, $j_r = r/2$ は量子力学のスピンの条件を満たす自由度である．例えば，j_p, j_q を固定したとき，j_r は

$$\begin{aligned} j_r \, = \, & |j_p - j_q|, \, |j_p - j_q| + 1, \, \cdots, \\ & (j_p + j_q) - 1, \, j_p + j_q. \end{aligned} \tag{30}$$

さて，この表し方を用いてループと面積の関係を見てみよう（図 7）．今，面積要素を貫くエッジにのみ半整数の値を書き込んだが，それ以外のエッジにはこの値に矛盾しないように数字を書き込むべきである．ループのときには交点数が出てきたが，スピンであることを反映した寄与を生み，面積固有値は[10]

$$A = 8\pi\gamma \sum \sqrt{j(j+1)}. \qquad (31)$$

$8\pi\gamma$ の起源は (12) である．古典論での面積 (25) は γ に依らないが，量子論では共役運動量が微分演算子に変わるために，結果が γ に依る．

6. ブラックホールの状態数の議論の変遷と準固有振動との関連

ブラックホールの状態数，というものをループ量子重力ではどのように捉えているのであろうか？図 8 のように，地平面をスピンネットワークが貫く様子を想像しよう．(31) を思い出せば，地平面の面積を固定したとき，その貫き方には，持っているスピンと貫く数を変える自由度があることがわかる．これを状態数として数える方法が良く知られている．

実際にはこれだけではなく，スピンネットワークが地平面を貫く毎に，量子化された欠損角を生じ，総和で S^2 になるという制限，拘束条件，地平面であるための境界条件を併せて自由度を数える．得られるエントロピーは，アシュテカらによると[11)]

$$S = \frac{A \ln(2j_{\min}+1)}{8\pi\gamma\sqrt{j_{\min}(j_{\min}+1)}}. \qquad (32)$$

$j_{\min}$ は取り得るスピンの非自明な最小値を取る．この分母と (31) を較べると，スピンネットワークが地平面を貫くことによってできる面積要素の最小値 $A_{\min}$ が表れていることがわかる．これは，地平面がプランクスケールに較べて充分大きいとき，最も細かく地平面を分割したもののみが状態数に効くことを表している．自然には $j_{\min} = 1/2$ だが，ドレイヤーにより次の提案がなされ，話題を呼んだ[12)]．

準固有振動からの値 (7) と $A_{\min}$ を同一視し，

$$dA = 4\ln 3 = A_{\min} \qquad (33)$$

と置く．これと (32) の S が $A/4$ に一致すべし，という要請をすると $j_{\min} = 1$ と定まる．γ と $j_{\min}$ の 2 変数代数方程式で，$j_{\min}$ が半整数のき

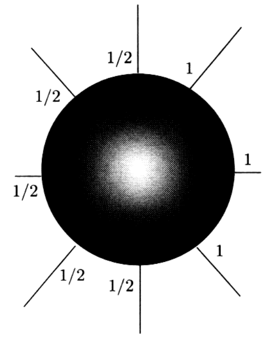


図 8　ブラックホールとネットワーク分布．

れいな値になったことは偶然ではなく，何か深い理由があるのではないか，という意見である．これを巡って議論が活発に行われた．ループ量子重力理論という枠組みでの提案に過ぎないエントロピーに，物理的解釈が与えられる意義は大きいのである．

しかし，(32) には確率統計の計算上での間違いがあり，$j_{\min}$ 以外の状態数も無視できず[13)]，

$$S = \frac{\gamma_M}{\gamma}\frac{A}{4} \qquad (34)$$

(γ_M は $\frac{1}{2} - \sum_j e^{-2\pi\gamma_M\sqrt{j(j+1)}} = 0$ を満たす値) であることが最近わかった．

これに対して反論が出ている．準固有振動の計算はシュワルツシルトブラックホールという球対称なモデルで行われている．しかし，上の計算では，例えば図 8 のような偏ったネットワーク分布をしているケースを除外していない．少なくとも粗視化したときは球対称性を反映すべきという条件を取り入れると[14)]，(32) の表式が再現され，ただし，$j_{\min}$ については不定性が残る．この議論では，確かに準固有振動との整合性が得られる．

この議論に一般性があるかどうかは重要である．筆者は，このような観点からディラトンと電磁場を伴う球対称ブラックホール[15)]でも準固有振動を求めた[16)]．驚くべきことにその表式は (6) と全く一致する．アシュテカらによると，地平面の外に物質場があっても，エントロピーの表式に影響を与えないはずである．このことからも上記の整合性は偶然ではないように思える．一方，ディラトンの

ない単なる電磁場入りのブラックホールでは (6) のようにならず[17]，今の所これを説明できない．

考察

これまでの結果を振り返ってみよう．(33) では $A_{\rm min}$ と dA を同一視している．しかし，(31) で面積が大きくなると，スピン j の数が多くなることと，j の取り得る範囲が大きくなることの両方を反映して，面積固有値の間隔としての dA，あるいは第一法則から dM は急速に狭まっていき，連続スペクトルに近づく．これは単純な仮定 (2) との決定的な違いである．この違いはホーキング輻射に現れる[1]．ホーキング輻射のピークの振動数はおよそ $\omega \sim 3T_{\rm BH}$ である．第一法則と (2) からは $dM \sim T_{\rm BH}$ なので，輻射は連続スペクトルを示さない．一方，ループ量子重力では，面積がプランクスケールに較べて十分に大きければ，輻射は連続スペクトルで近似できる．ブラックホール蒸発の様子がわかれば，量子重力のモデルにも制限が与えられるはずである．

7. 結びに

ループ量子重力での状態数に関する議論は現在進行中であり，荒いものである．準古典極限の節から想像されるように，球対称性を反映させると言っても，簡単ではないのである．また，準固有振動との関連の有無も結論付けるのは早いように思われる．しかし，準固有振動という一種の“実験場”ができたことで，状態数に関する議論が活発化されていることは疑いようがなく，今後はより精密な議論が進められると思われる．ループ量子重力から求められた状態数が，ブラックホール熱力学と同列の地位を得る日も遠くないのかも知れない．

8. その後の進展

その後数年間で，状態数に関する多くの論文が出回り，筆者もその一担をになった[18]．しかし，現在の所は決定的なものがないのが実情である．増加している論文数は逆に大きなブレイクスルーを必要としていることも示しており，今後に期待したい．

参考文献と注

1) J.D. Bekenstein and V.F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **360**, 7 (1995).
2) S. Hod, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4293 (1998).
3) 例えば，シュワルツシルトブラックホールでは，その質量を M として，$dr = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^*$ の関係がある．
4) L. Motl and A. Neitzke, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 307 (2003).
5) R. Gambini and J. Pullin, Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996).
6) A. Ashtekar, C. Rovelli, and L. Smolin, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 237 (1992).
7) C. Rovelli, *Class. Quantum Grav.* **9**, 1613 (1991).
8) H. Sahlmann, T. Thiemann, and O. Winkler, *Nucl. Phys. B* **606**, 401 (2001).
9) C. Rovelli and L. Smolin, *Phys. Rev. D* **52**, 5743 (1995).
10) C. Rovelli and L. Smolin, *Nucl. Phys. B* **442**, 593 (1995); Erratum, *ibid.*, **456**, 753 (1995).
11) A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 904 (1998).
12) O. Dreyer, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 081301 (2003).
13) M. Domagala, J. Lewandowski, *Class, Quantum Grav.* **21**, 5233 (2004): K.A. Meissner, *ibid.*, 5245 (2004).
14) O. Dreyer, F. Markopoulou, and L. Smolin, hep-th/0409056.
15) G.W. Gibbons and K. Maeda, *Nucl. Phys. B* **298**, 741 (1988); D. Garfinkle, G.T. Horowitz and A. Strominger, *Phys. Rev. D* **43**, 3140 (1991).
16) T. Tamaki and H. Nomura, *Phys. Rev. D* **70**, 044041 (2004).
17) N. Andersson and C.J. Howls, *Class. Quantum Grav.* **21**, 1623 (2004).
18) T. Tamaki and H. Nomura, *Phys. Rev. D* **72**, 107501 (2005); T. Tamaki, *Class. Quantum Grav.* **24**, 3837 (2007); T. Tanaka and T. Tamaki, arXiv: 0808.4056.

（たまき・たかし，日本大学工学部）

IV. ループ量子重力理論への展開

高エネルギー γ 線クライシス

菅本 晶夫・渡部 勇

1. なぜクライシス（危機）か？

ヘラクレス座にあるマルカリアン 501 銀河（Mrk 501）は，BL Lac 天体と呼ばれる活動銀河の中心核であり，激しく粒子を放出するジェットをもっているが，そのジェットの軸が我々の太陽系に向いている．そのために 1997 年の爆発時には，20 TeV（1 TeV $= 10^{12}$ eV（電子ボルト））にも達する高エネルギーの γ 線を地上で観測することができた．観測したのはアフリカ西北部の大西洋に浮ぶカナリー諸島に設置された HEGRA（High Energy Gamma Ray Astronomy）であった[1]．しかしこのような高エネルギーの γ 線は，Mrk 501 から地球までの 139 Mpc（メガパーセク）$= 4.5$ 億光年の距離を飛んでいる間に，そこに存在する**赤外背景輻射**（Infra Red Background Radiation: **IRBR**）と衝突して，電子と陽電子を対生成して（即ち，$\gamma+\gamma \to e^- + e^+$）消滅するはずである．したがって地上まで到達するのは理解できない．これを**高エネルギー γ 線クライシス**あるいは **TeV γ crisis** と言う．

「クライシス」と言う場合にも前提条件は必要であり，もしもその前提条件の一つを変更できるならばクライシスではなくなる可能性がある．ではクライシスとする前提条件は何か？

(1) まず $\gamma + \gamma \to e^- + e^+$ の反応が起きるためには，TeV γ 線のエネルギー E と相手方の IR γ 線のエネルギー ε の積が充分大きくて，電子と陽電子の少なくともその両者の静止エネルギー $2m_ec^2$（m_e は電子と陽電子の質量）を供給できなければならない．この条件は通常，

$$E\varepsilon \geqslant (m_ec^2)^2 = 0.25 \times 10^{12}(\text{eV})^2 \qquad (1)$$

である．等号の値を**しきい値**と言う．即ち，反応が起るためには「しきい値」を越えなければならない．この式が反応する相手方を決める．E を 1, 10, 100, 1000 TeV とすると相手方の γ のエネルギー ε はしきい値上で，$2.5 \times 10^{-1}, 2.5 \times 10^{-2}, 2.5 \times 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-4}$ eV であり，波長 λ に直すと 1, 10, 100, 1000 μm となる．3 K 宇宙背景輻射の波長は 1000 μm なので，これは 10 TeV の γ 線とは反応しない．反応するのは，$\lambda \lesssim 10\,\mu$m の赤外領域にある背景輻射（IRBR）である．

次にクライシスとなる前提条件は，**(2)** 反応する相手方（IRBR）が充分多数存在し，かつ **(3)** 反応（$\gamma+\gamma \to e^- + e^+$）の反応率が充分大きくなければならない．この (2) と (3) を調べるのに好都合な指標は，**平均自由行程**（mean free path）$x_{\gamma\gamma}$ である．現実には相手方の IRγ は色々な方向に運動しながら，Mrk 501 から飛来する TeVγ と衝突するし，また IRγ はそのエネルギー ε に応じて存在量が変化しているので，充分な注意が必要である*1)．ここでは単純に，IRγ は静止していて

*1) エネルギー分布している IRγ と TeVγ との反応 $\gamma+\gamma \to e^- + e^+$ の単位時間当りの遷移確率 w を計算して

かつ，単位体積当り n 個存在するが，これも ε に依存しないとしよう．反応率は通常**断面積**（cross section）σ で表される．TeVγ が面積 σ の円盤であると考えて，これが分布している IRγ の海の中を垂直に移動するときに，平均として初めて衝突するまでにどれ位の距離を自由に飛ぶことができるかが $x_{\gamma\gamma}$ である．つまり

$$x_{\gamma\gamma}\sigma n = 1 \qquad (2)$$

から $x_{\gamma\gamma}$ が求まる．仮に σ として最大値よりも少し控え目の値 $\sigma = 10^{-26}\,\mathrm{cm}^2$，$n$ を 3 K 宇宙背景輻射の 1/100 程度の値 $n = 5$ 個/cm^3 とすると，$x_{\gamma\gamma}$ =10 Mpc（メガパーセク）となる．より詳しく，IRγ の分布 $n = n(\varepsilon)$ に関する最近の観測結果を用いて計算すると，$x_{\gamma\gamma}$ = 13.1 Mpc= 0.43 億光年となる[2]．この値では Mrk 501 を出発した 20 TeV の γ 線は，地球までの距離の 1/10 の所で IRγ と衝突し，その半数強が消滅する．10 回衝突する可能性があるので，20 TeV の γ 線の生存率は $(1/2.7)^{10} = 1/20,000$ であり無視できる程に小さい（但し 2.7 = 指数関数の底 e）．これが「前提条件 (1)〜(3) の下で成り立つ高エネルギー γ 線クライシス」である．同様の現象は，Mrk 421 (129 Mpc)，1ES1959+650 (194 Mpc)，H1426+428 (510 Mpc) 等の活動銀河（括弧内は距離）からの TeVγ でも知られている．

前提条件の (2) を確実にするためには，より精密な観測を行って IRγ の存在量のエネルギー依存性 $n(\varepsilon)$ を精度よく決める必要がある．これは実験家の仕事である．前提条件の (1) と (3) は電子と光子の相互作用に関するものであり，素粒子理論の最も基本的な理論「**量子電磁力学**」(QED=Quantum Electro Dynamics) の問題である．この理論に修正を要求することはタブーであるので，言い出すには勇気が必要である．高名な S. Coleman と S.L. Glashow[3]が，「たしかに QED は精密科学であるが，確かめられているのは低エネルギー領域であり，高エネルギーの宇宙線に関する現象は未知の領域なので，修正をうけてもよい.」と言ってくれたので気持が楽になった．Mrk 501 からの TeVγ クライシスを説明するために，G. Amelino–Camelia 他や木舟正は[4]，エネルギー E と運動量 k の間の関係式を

$$(ck)^2 = E^2 + \xi_\gamma E^3/M_{\mathrm{P}} \qquad (3)$$

と修正した．右辺の第 2 項は通常は存在しない項であり，$M_{\mathrm{P}} = 10^{19}$ GeV（ギカ 10^9 eV）は素粒子の相互作用に重力が寄与し始めるエネルギーを表す．$O(1)$ の ξ_γ をとるとクライシスがなくなることが示された．では (3) 式のような修正を行う根拠は何なのだろう？ これは理論家の問題であり，様々なアイデアを出すことができるだろう．実際，佐藤文隆はこの問題を以前から議論していた[5]．

ここでは，著者たちのアイデアを紹介しよう[6]．これは本別冊号のテーマである「量子重力理論の新たなランドスケープ」と密接に関係する素粒子模型を用いるのである．

$$(x_{\gamma\gamma}/c)w = 1$$

から $x_{\gamma\gamma}$ を求めるとよい．

2. 高エネルギーにおいて次元が減少する素粒子模型？

我々の 4 次元の世界を多次元空間に浮ぶ膜であるとする考え方が最近流行している．膜は「membrane」というので，このような多次元空間に浮ぶ膜状の世界を**ブレーン**あるいは**ブレーンワールド**と言う．この場合，4 次元以外に少なくとも 1 つ余分の次元がある．ところが 5 次元以上の理論は一般にはエネルギーの上昇に伴う発散をうまく処理（くりこみ処理）することができないので困った理論である．N. Arkani–Hamed たち[7]は，低エネルギーでは 5 次元のゲージ理論であっても高エネルギーになると，1 つの次元が離散的（とびとびの点に）なるのであれば，実質的に 4 次元なので発散の問題が解消すると考えた．著者の 1 人 (A.S.) は[8]，この考えをもう 1 次元下げて用いると，低エネルギーでは通常の 4 次元理論であっても高エネルギーでは，実質的に 3 次元の理論とな

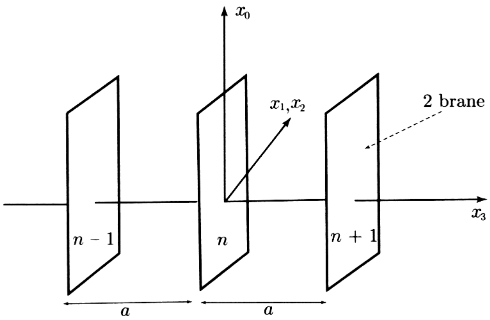


図 1　x_3 方向が離散的な ADST 模型の時空.

る模型を，ゲージ理論のみならず重力理論においても作ってみた.

このもっとも単純な例を，電磁気学を用いて説明しよう．低エネルギーでは電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ を両方備えた通常の 4 次元の電磁気である．電磁場のラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ は，低エネルギーでは，通常の

$$\mathscr{L}_{低エネルギー} = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)^2 - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)^2\right\} \qquad (4)$$

であるが，高エネルギーでは電場が消えて，

$$\mathscr{L}_{高エネルギー} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)^2 \qquad (5)$$

となる模型である．図 1 はブレーンが x^3 方向に等間隔 a で無数に並んでいる様子を示している．ここでは x^3 を時間座標 t と考えて，(x^1, x^2, x^0) を 3 次元の空間座標 $\boldsymbol{x}$ としよう．時間はとびとびの値 $t = na$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ をとっている．さて電場と磁場をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ で表すことを知っているならば，次の式が理解できる[9]．即ち，

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi. \qquad (6)$$

$\boldsymbol{B}$ は t が一定のブレーン内で閉じているが，$\boldsymbol{E}$ は異なるブレーン上の（異なる時間の）ϕ をつなぐ概念である．この異なるブレーンを n で番号付けをするとより理解がしやすい．つまり $U(\boldsymbol{x}; n, n+1) = \exp\left\{ia\phi(\boldsymbol{x}, na)\right\}$ とおくと，電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, na) = \frac{i}{a}\Big[\nabla - i\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, na) + i\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{x}, (n+1)a\big)\Big]U(\boldsymbol{x}; n, n+1) \qquad (7)$$

と書ける．$\boldsymbol{A}$ の係数の $\mp$ が電荷の正・負に対応することを知っていると，U は n 番目のブレーン上の正の電荷をもつ粒子 $q(\boldsymbol{x}, n)$ と $(n+1)$ 番目のブレーン上の負の電荷をもつ反粒子 $\bar{q}(\boldsymbol{x}, n+1)$ の複合粒子であることがわかるだろう．低エネルギーでは複合粒子 U が誕生するが，高エネルギーでは U が q と $\bar{q}$ に分解することなどは，よく起こる現象である．例えば，q をクォーク，$\bar{q}$ を反クォークと見なして，U を低エネルギーで生まれる中間子（メソン）と考えれば，よく知られた現象であることが理解できるだろう．U が低エネルギーで誕生すると電場が発生して 4 次元理論となり，高エネルギーになって U が消えると 3 次元の理論となるのである.

さらにこの考えを膨らませると，宇宙の歴史を遡るならば時空の次元は 4 から次第に減少して，宇宙の誕生時にはとびとびの点（離散点）からなる 0 次元の時空となるだろう．したがってこのような考え方を，**漸近的時空の消滅（離散化）**(Asymptotic Disappearance (Discretization) of Space–Time (**ADST**)）と呼んでもよいだろう[8].

3. ADST 模型は高エネルギー γ 線クライシスを回避できるか？

前節の例では，時間座標がとびとびの値をとるとしたので，ブレーンは 3 つの空間座標をもつが時間座標を含まなかった．この節では，空間座標の 1 つ，例えば x^3 がとびとびの値をとるとしよう[6]．この場合のブレーンは 2 つの空間座標に加えて時間座標をもっている．即ち 3 つの空間座標のうち，x^1 と x^2 は連続であるが，x^3 は離散的，$x^3 = na$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$，であるので，空間が非等方（方向によって異なること anisotropic）になる．この x^3 軸が，太陽系から見た Mrk 501 銀河の方向だったとしたらどうだろう.

このような場合，物質を表す波動函数 $\phi(t, x^1, x^2,$

n) は

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2\right]\phi(t,x^1,x^2,n)$$
$$-\frac{1}{a^2}\Big[\phi(t,x^1,x^2,n+1)$$
$$-2\phi(t,x^1,x^2,n)+\phi(t,x^1,x^2,n-1)\Big]$$
$$-(m^*)^2\phi(t,x^1,x^2,n)=0 \qquad (8)$$

を満たす．これを運動量空間で書き直すと，

$$[E^2-k_1^2-k_2^2-(\tilde{k}_3)^2$$
$$-(m^*)^2]\phi(E,k_1,k_2,k_3)=0 \qquad (9)$$

となる．ここで $\tilde{k}_3=\frac{2}{a}\sin\frac{ak_3}{2}$ である．$a\to 0$ として x^3 が連続的な場合に運動量の役割を果たすのは k_3 であるが，離散的になった場合に運動量の役割を果たすのは $\tilde{k}_3$ であると考えよう．この考えに立つならば，x^3 が連続である通常の場合の γ（光子）が満足するエネルギー・運動量の関係式 $E_\gamma^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$ を保ちつつ，x^3 を離散化した (9) を満たすように書き直そう．即ち，$E_\gamma^2=k_1^2+k_2^2+(\tilde{k}_3)^2+(m_\gamma^*)^2$ と書き換えると，γ は次の式で与えられる質量 m_γ^* をもつことになる：

$$(m_\gamma^*)^2 = k_3^2\left[1-\left(\frac{2}{ak_3}\sin\frac{ak_3}{2}\right)^2\right]. \qquad (10)$$

電子や陽電子の波動函数は (8) とは少し異なるディラック方程式を満たすので，これらの粒子の質量 M_e は

$$M_e^2 = m_e^2+p_3^2\left[1-\left(\frac{1}{ap_3}\sin ap_3\right)^2\right] \quad (11)$$

で与えられることになる．

このように生成される電子と陽電子の質量が，通常の m_e よりも p_3 が大きくなると増大するので，高エネルギーでは e^+e^- 対生成が難しくなって，前提条件 (1) が崩れることになる．前提条件 (1) が崩れる領域は $a^{-1}<E_\gamma^2/(4\sqrt{3}m_e)=1\times10^{11}\,\mathrm{GeV}$ ($E_\gamma=20\,\mathrm{TeV}$ として) である．

前提条件 (2) と (3) は通常通り変更しないで TeVγ の平均自由行程 $x_{\gamma\gamma}$ を計算すると図 2 のようになる[6]．縦軸は $x_{\gamma\gamma}$ を Mpc で表したときの 10 の巾を与える．これが 139 Mpc より上

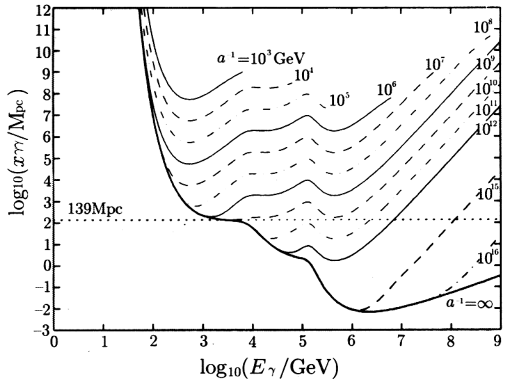


図 2 ADST 模型でのエネルギー E_γ の γ 線が持つ平均自由行程 $x_{\gamma\gamma}$.

方にあれば，対生成せずに観測にかかることになる．横軸は高エネルギー γ 線のエネルギーを GeV 単位で測ったときの 10 の巾を示す．3 の場所が 10^3 GeV で 1 TeV である．$a^{-1}\lesssim 10^{10.5}$ GeV ならばクライシスを回避できることがわかる．a^{-1} があまり小さすぎると（a が大きすぎると）$ak_3/2$ が π を越えることになって，γ 線の進行方向が逆になって地球に到達できない．このことから $a^{-1}\gtrsim 2.5$ TeV と下限が付く．同様の解析を H1426+428 銀河からの 5.37 TeVγ に適用すると，1.4 TeV $\lesssim a^{-1}\lesssim 10^{9.5}$ GeV が得られる．

仮に将来，1 PeV（ペタ電子ボルト $=10^{15}$ eV）の γ 線が地上で観測されたとしよう．図 2 の横軸の 6 の所を見ると，実線は $x_{\gamma\gamma}=9$ kpc を示し，$a^{-1}<10^{10}$ GeV を表す破線は $x_{\gamma\gamma}>300$ Mpc を表している．9 kpc と言えば我々の銀河の半径 (15 Mpc) よりも短い距離なので，実線で示された通常の 4 次元 QED では到達できないはずの近くにある活動銀河やアンドロメダ大星雲 (706 kpc)，マゼラン星雲（49 kpc と 61 kpc）などから PeV の γ 線が観測されると，我々の模型が実証されることになる．また $E_\gamma=1$ TeV（横軸の 3 の所）付近で $x_{\gamma\gamma}$ の曲線が極小になっている．だから Mrk 501 よりももう少し遠い，数 100 Mpc の距離にある活動銀河から 1 TeV の前後の γ 線を観測したときに，1 TeV 付近だけがその前後に比べて暗いことがわかったりすると，ますます面白い

ことになる….

このようにいろいろと夢を膨らませることはできるが，理論の常として，その理論を提案するに際して，必ずいくつかの前提条件があり，その条件が自然を的確に表現しているかどうかが重要であることを認識しつつ，この辺りで筆をおくことにしよう．

4. その後の進展

当初の原稿執筆以降，理論研究[10)]と観測[11)]の両面でいくつかの発展があった．特にHESS，VERITAS，MAGICといった観測グループからは，最大53億光年までに至る複数の遠方銀河からの数百GeVから数TeVのγ線の到来が報告された．これらにより，当時想定されていたよりも少ないIRBRが示唆されて来ており，前提条件の(2)を破る方向でクライシスを解決できる可能性が強まっている．

とは言え，ADST模型が現時点で否定されたという訳でもない．常に現在の理論の適用限界を意識して，新たな可能性に心を配ることは重要である．

参考文献

1) F.A. Aharonian et al. (HEGRA), *Astron. Astrophys.* **366** (2001) 62; *i.b.d.* **406** (2003) L9; *i.b.d.* **403** (2003) 523.
2) R.H. Protheroe and H. Meyer, *Phys. Lett.* **B 496** (2000) 1.
3) S. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Lett.* **B 405** (1997) 249; *Phys. Rev.* **D 59** (1999) 116008.
4) G. Amelino-Camelia 他, *Nature* **393** (1988) 763; T. Kifune, *ApJ. Lett.* **518** (1999) L21; G. Amelino-Camelia and T. Piran, *Phys. Rev.* **D 64** (2001) 036005.
5) H. Sato, astro-ph/0005218 (2000).
6) G.-C. Cho, J. Kamoshita, M. Matsunaga, A. Sugamoto and I. Watanabe, astro-ph/0404595 (2004); 渡部勇「マルカリアン 501 銀河からの TeVγ線と空間の非一様性」素粒子論研究 109-5 (2004-8) E41.
7) N. Arkani-Hamed 他, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 4757; C.T. Hill, S. Pokorski and J. Wang, *Phys. Rev.* **D 64** (2001) 105005.
8) A. Sugamoto, *Prog. Theor. Phys.* **107** (2002) 798; *Grav. Cosmol* **9** (2003) 91, hep-th/0210235; G.-C. Cho, E. Izumi and A. Sugamoto, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 116009.
9) 菅本晶夫, 数理科学・別冊「微積分の広がり」pp.39.
10) J.R. Pimack, J.S. Bullock and R.S. Somerville, *AIP Conf. Proc.* **745**, 23 (2005); F.W. Stecker, M.A. Malkan and S.T. Scully, *Astrophys. J* **648**, 774 (2006); *i.b.d* **658**, 1392 (2007).
11) 例えば，The MAGIC collab., *Science* **320**, 1752 (2008).

（すがもと・あきお，お茶の水女子大学理学部）
（わたなべ・いさむ，工学院大学学習支援センター）

V．ブレーンワールドからの展開

TeV 重力理論

川崎 雅裕

1. 余次元をもった理論

我々の住む時空の次元が 4 次元（時間 1 次元 + 空間 3 次元）ではなく空間に余次元がある（つまり，空間が 3 次元より大きな次元を持っている）という考えは約 80 年近く前，1921 年の Kaluza（カルツァ）と 1926 年の Klein（クライン）の論文までさかのぼることができる．Kaluza と Klein の理論は空間の余次元を考えることによって重力と電磁気力を統一しようという試みであったが成功はしなかった．しかし，その後，余次元をもった理論は一般に Kaluza–Klein 理論と呼ばれるようになり，これまでも，自然界に働く力を統一する試みの中で Kaluza–Klein 理論は考えられてきた．1980 年代には超対称性理論（超重力理論）と Kaluza–Klein 理論の組み合わせで重力を含めた統一理論を構築する試みが研究された．特に，1980 年代後半に**超弦理論**[1] が究極の統一理論と期待されるようになって，多次元空間の理論の重要性は決定的となった．超弦理論は素粒子の最小単位がそれまで考えられていた「点」ではなく，1 次元的な広がりを持ったストリングと呼ばれる「ひも」であることを基本とする理論で，それが矛盾のない理論となるためには 10 次元の時空を必要とした．つまり，空間 6 次元が余次元として必要な理論だったのである．したがって，超弦理論が正しいとすると必然的に我々は 10 次元世界に住んでいることになる．

このように，時空の次元が 4 次元以上の可能性があるわけだが，もしそうであるとして我々が空間を 3 次元としか認識できないのはどうしてかという疑問が当然出てくる．この疑問に対する 1 つの説明は空間 3 次元以外の余次元方向が通常の空間のように広がったものではなく円周のようにコンパクトな（有限の大きさを持つ）空間で，しかも，そのサイズが非常に小さいために我々はその存在を認識することができないということである．現在，実験で検証できる最小のサイズは加速器を使って得られる約 10^{-17}cm であるので上の説明に従えば，余次元の大きさはこの実験で検証できる長さより小さいことになる．

この余次元に対する考え方は超弦理論の発展に伴って大きく変わることになった．1990 年代に入って超弦理論はもっと基本的な M 理論と呼ばれる理論のある側面を記述したものであるという考えが出された．M 理論は時空 11 次元で定義され，それが正しいとすると余次元の数は 7 になる．さらには，超弦理論/M 理論には **D ブレーン**という様々な次元をもった「膜」が存在することが発見された．ストリングとブレーンが共存している多次元世界に我々は住んでいることになったのである．おもしろいことに，この理論によれば重力を除く 3 つの力（電磁気力，弱い力，強い力）を媒介する粒子（ゲージ粒子）はブレーン上だけに存在することがわかった．そうすると，図 1 のよ

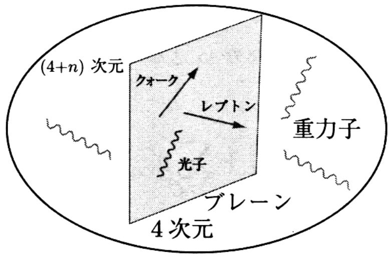


図 1 ブレーン・ワールドの概念図.

うに我々自身を含めて我々が知っている素粒子はあるブレーンだけに存在でき重力だけが余次元全体を自由に伝わっていくという描像を描くことができる．これが**ブレーン・ワールド**と呼ばれる世界観で，この世界では次に述べるように大きなサイズの余次元が存在可能で，その場合重力の基本的スケールが 4 次元理論で考えられているプランク・スケール（$M_4 \sim 10^{19}$ GeV）よりもずっと低くなって，TeV スケールになる可能性もある．これを TeV 重力理論と呼んでいる[2)].

2. 大きな余次元と TeV 重力

まず，一般的に余次元がある場合の重力について考えよう．通常の 4 次元では重力の法則（ニュートンの法則）は

$$F_{(4)}(r) = G_{(4)}\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1}$$

のように表現できる．つまり，質量 m_1, m_2 の質点間に働く力 $F_{(4)}$ は距離 r の 2 乗に反比例し，その比例定数が重力定数 $G_{(4)}$ で，4 次元のプランク質量と $M_{(4)} = G_{(4)}^{-1/2}$ という関係がある．このニュートンの法則は $(4+n)$ 次元では次のようになる．

$$F_{(4+n)}(r) = G_{(4+n)}\frac{m_1 m_2}{r^{2+n}}. \tag{2}$$

ただし，これは距離 r が余次元の大きさに比べて十分小さい場合で，r が余次元の大きさ r_n より大きくなると余次元の効果は見えず，力は式 (1) で与えられる．これから 2 つの重力定数の間には

$$G_{(4)} \sim G_{(4+n)} r_n^n$$

という関係が成り立つ．$(4+n)$ 次元でのプランク・スケール $M_{(4+n)} \sim G_{4+n}^{-1/(n+2)}$ を使うとこれから 2 つの重力定数の間には

$$M_{(4)}^2 = M_{(4+n)}^{n+2} r_n^n \tag{3}$$

という関係が成立する．4 次元で見たときのプランク質量 $M_{(4)}$ は分かっているので，上の式から $(4+n)$ 次元での重力の基本スケール $M_{(4+n)}$ が余次元の大きさ r_n と次のような関係にあることが分かる．

$$r_n = 2\times 10^{\frac{31}{n}-16}\ \mathrm{mm}\left(\frac{\mathrm{TeV}}{M_{(4+n)}}\right)^{1+\frac{2}{n}}. \tag{4}$$

これから分かるように，余次元の大きさが昔の Kaluza–Klein 理論で考えられていたものより非常に大きい場合には重力の基本的スケールが TeV，すなわち TeV 重力が成立するのである．例えば，余次元の数が 2 の場合，余次元のサイズは約 1 mm になり，超弦理論で予言されるように余次元の数が 6 だとそのサイズは 10^{-12} cm 程度になる．したがって，mm スケール以下でニュートンの法則が変わってしまうことだってあり得るのである．前の節で，余次元の大きさは加速器実験で検証できる最小のサイズである約 10^{-17}cm 以下であると述べたがこれはブレーンがない場合でブレーン・ワールドでは実験で見ているクォークやレプトンといった素粒子はブレーン上に拘束されていて，しかも，ブレーンの厚さは TeV スケールで決まる 10^{-17}cm 以下なのでこれまで行われてきた実験とは矛盾しないのである．

多次元の時空にブレーンが存在し，我々はそのブレーンに住んでいて，重力だけがブレーンの外の空間を伝わることができるという考えは，超弦理論と整合するだけでなく，素粒子物理の大きな問題を解決する可能性もある．素粒子の標準理論では電磁気力と弱い力は $SU(2)\times U(1)$ という群で表現される対称性を持つ電弱相互作用で統一的に記述され，統一が実現するエネルギー・スケールは数 100 GeV である．これに比較して重力の基

本的スケールは 10^{19} GeV 程度であり，両者には16桁以上の開きがある．なぜこのように大きく異なったエネルギー・スケールが素粒子に存在するのかが「階層性の問題」である．これは概念的な問題だけではなく，標準理論に現れるヒッグス粒子の質量の量子補正を計算するとエネルギーの2乗で発散してしまい，100 GeV 程度の質量を説明するためには繰り込みによる極めて不自然な調節が必要になり，電弱相互作用のスケールが量子補正に対して不安定であるという深刻な問題を引き起こす．ところが，上で見たように，ブレーン・ワールドは余次元のサイズが大きければ重力の基本スケールを電弱相互作用のスケールとほぼ同じの TeV にすることができるので，階層性問題がないのである（ただ，なぜ余次元のサイズが大きいかを説明する必要があるが）．

3. TeV 重力理論に対する制限

重力の基本スケールが TeV であるとすると，その影響が加速器実験や宇宙物理的現象で見えることが期待される．逆にそれが見えなければ，多次元での重力のスケール $M_* \equiv M_{(4+n)}$ に制限が付けられることになる．残念ながら現在のところ，TeV 重力の兆候はまだ見つかっておらず，ヨーロッパの CERN の LEP 実験や米国のフェルミ加速器研究所の Tevatron 実験，さらには超新星 1987A の観測などから M_* に対する制限が得られている．

TeV 重力の効果を理解する上で重要なのは Kaluza–Klein モードの存在である．いま，余次元方向の座標を $y_i (i = 4, \cdots, 3+n)$ とし，コンパクトな空間を半径 r_n のトーラスとすると，余次元方向は周期 $2\pi r_n$ を持つ空間と見なせるので，その方向の粒子の運動量 p_i は

$$p_i = \frac{k}{r_n} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

という離散的な値を持つ．このことを余次元方向に伝わる重力に適用してみよう．重力は重力子という質量ゼロの粒子によって伝えられる．余次元方向に運動量をもって運動している重力子を4次元に住んでいる我々から見るとそのエネルギーの2乗 E^2 は

$$E^2 = \sum_{j=1,2,3} p_j^2 + \sum_{i \geq 4} p_i^2$$

となる．右辺の1項目が通常の3次元空間方向，2項目が余次元方向の運動エネルギー（光速度を1にした）に対応している．余次元方向の運動は我々には見えないので，上のエネルギーと4次元での粒子のエネルギー $E^2 = m^2 + p^2$ （m: 質量）の表式を比べて分かるように，余次元方向の運動量は4次元から見ると粒子の質量と見なせる．余次元方向の運動量は離散的だったのでこの質量も離散的になる．このようにコンパクトな余次元空間を伝わる重力子には $1/r_n, 2/r_n, \cdots$ といった離散的な質量をもった励起状態が存在する．これが Kaluza–Klein モードである．このように多次元空間の理論を4次元理論の言葉で記述することができる．例えば，ブレーン上での重力相互作用で重力子が生成され，それが余次元方向に飛び出すという過程は4次元の言葉では相互作用によって質量をもった Kaluza–Klein モードが生成されたということになる．

3.1 加速器実験からの制限

CERN の LEP 実験は高エネルギーの電子 (e^-) と陽電子 (e^+) を衝突させる実験で，フェルミ加速器研究所の Tevatron 実験は高エネルギーの陽子 (p) と反陽子 ($\bar{p}$) を衝突させる実験である．それぞれの実験で，次のような反応で重力子 (G) が生成される（図2）．

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + G,$$
$$q + \bar{q} \rightarrow g + G.$$

ここで，γ は光子，$q(\bar{q})$ は（反）クォーク，g はグルーオンである．この反応は4次元的立場から見れば4次元的な重力相互作用で Kaluza–Klein モードの重力子ができたと見なせる．この反応の重心系でのエネルギーを E_{CM} とすると，生成可能な Kaluza–Klein モードの数は約 $(E_{CM}/r_n^{-1})^n$ となる．したがって，重力子の生成率はこのモー

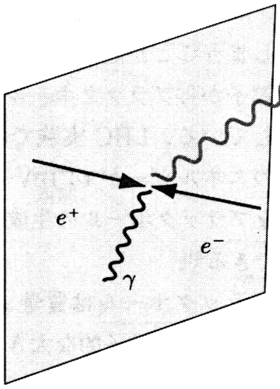


図2　電子・陽電子衝突による重力子の生成.

表1　M_* に対する下限.

	M_* $(n=2)$	M_* $(n=4)$	M_* $(n=6)$
LEP	1.2 TeV	0.73 TeV	0.53 TeV
Tevatron	1.14 TeV	0.86 TeV	0.78 TeV
SN1987A	5 TeV	1 TeV	0.1 TeV

ドの数の分だけ大きくなる．これが余次元があるのとないのでの決定的な違いで，通常の4次元重力では重力は極めて弱いため重力子の生成は無視できるが，多次元理論では Kaluza–Klein モードによる効果で無視できない生成率が期待されるのである．ただし，残念ながら上のような生成反応はまだ見つかっておらず，重力の基本スケール M_* に対して表1のような制限が LEP と Tevatron 実験から得られている[3]．これら加速器実験から得られる制限は余次元の数 n が大きくなるほど弱くなるがこれは式 (4) から分かるように n が増えると余次元のサイズ r_n が小さくなり，その結果 Kaluza–Klein モードの数が減るからである．

3.2　超新星 1987A からの制限

超新星 1987A は 1987 年 2 月に大マゼラン星雲で発見された超新星で超新星爆発の際に放出されたニュートリノが人類史上初めて神岡で観測されたことで有名である．超新星の中心温度 T は約 30 MeV（3 千億度）もあり，そのような高温では重力子（Kaluza–Klein モード）がたくさん作られる可能性がある．重力子の生成断面積 (σv) は

$$\sigma v \sim \frac{1}{M_{(4)}^2}\left(\frac{T}{r_n^{-1}}\right)^n \sim \frac{T^n}{M_*^{n+2}} \tag{5}$$

となる．加速器での反応と同様に $(\cdots)$ の部分が Kaluza–Klein モードによる生成率の増加を表している．

生成された重力子はほとんど他の粒子と相互作用することなく超新星から脱出してしまう．そのため重力子の生成率が大きくなると超新星の爆発エネルギーの大部分を生成された重力子が超新星の外に持ち出すことになる．そうなると，本来超新星爆発のエネルギーを外に持ち出すはずのニュートリノの放出量は減少してしまう．ところが，実際には，超新星 1987A のときには神岡・米国（IMB）の観測によって超新星爆発のエネルギーのほとんどがニュートリノとして放出されたことが分かっている．このことから，重力子の生成率に対して制限が得られ，それは上の式から分かるように M_* に下限をつけることになる．結果として得られる制限は表1に示してあるが，余次元の数 n が 2 の場合には加速器実験よりも厳しい制限が得られるが，n が大きくなると制限は加速器の場合よりも弱くなる．これは超新星の温度が加速器実験のエネルギーよりも低いためである．

4. ブラックホール生成

TeV 重力理論では重力の基本的なスケールが TeV であるために，エネルギーが TeV を超えると 4 次元の重力理論ではあり得ないような現象が期待される．それが，**ブラックホール**の生成である．いま，余次元のサイズに比べて小さいブラックホールを考えてみよう．ブラックホールの大きさはシュバルツシルト半径で決まる．$(4+n)$ 次元でのシュバルツシルト半径は，大雑把には次のようなニュートン力学的な考えで求めることができる．考えている距離が余次元のサイズ r_n より小さい場合の重力の法則 (2) を使えば，質量 M の物体が作る重力ポテンシャル U_{4+n} は

$$U_{4+n}(r) \sim \frac{1}{M_*^{2+n}}\frac{M}{r^{n+2}} \tag{6}$$

で与えられる．速度 v で運動している質量 m の

質点を考えると，この質点が上の重力ポテンシャルに拘束されずに脱出するためには，運動エネルギーがポテンシャルエネルギーより勝っていなければならない，つまり，

$$\frac{1}{2}mv^2 > mU_{4+n}(r). \tag{7}$$

このとき，光速でも脱出できない（上の不等式が成り立たない）半径がブラックホールのシュバルツシルト半径になる．したがって，$(4+n)$ 次元でのシュバルツシルト半径 R_s は式 (7) で $v=1$（ここでは光速度を 1 にしている）として，不等号を等号に変えることによって

$$R_s \sim \frac{1}{M_*}\left(\frac{M}{M_*}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{8}$$

と見積ることができる．これは相対論を使った結果と数ファクターを除いて一致する．$M_* \sim 1\,\mathrm{TeV}$ とすると，この式から，逆に，質量（= エネルギー）が 1 TeV 程度の物質が半径 $1/M_* \sim 10^{-17}\mathrm{cm}$ の領域内に押し込められるとブラックホールになることが分かる．

4.1 加速器でのブラックホール生成

TeV 重力理論におけるブラックホール生成は CERN で 2008 年にスタートした大型加速器実験（LHC）で実際に確かめられる可能性がある．LHC では加速された陽子同士を衝突させる．陽子はクォークやグルーオンでできているので，実際には高いエネルギーをもったクォーク・グルーオンの固まりが衝突するという描像になる（図 3）．図で示したように陽子の中のクォークまたはグルーオン i と j が接近して重心系で見るとそのエネルギーで決まるシュバルツシルト半径の中に 2 つの粒子が入ってしまうことが起こる．このことは i と j の 2 つの粒子からブラックホールが生成されることを意味している．LHC 実験では 2 つの陽子の重心系でのエネルギーが 14 TeV あり，ここで述べたようなブラックホールの生成が多数起こることが期待できる[4)]．

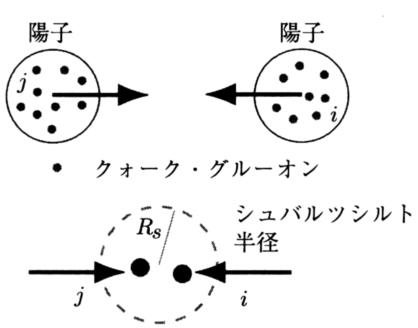


図 3 陽子・陽子衝突によるブラックホールの生成．

生成されたブラックホールは質量 M_{BH} が数 TeV（$\sim 10^{-20}$ g）で，素粒子的な大きさしか持っていないので**ホーキング放射**によってすぐに蒸発してしまう．ホーキング温度 T_H とブラックホールの寿命 τ はそれぞれ

$$T_H \sim \frac{1}{R_s} \sim M_*\left(\frac{M_*}{M_{BH}}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{9}$$

$$\tau \sim \frac{1}{M_*}\left(\frac{M_{BH}}{M_*}\right)^{\frac{n+3}{n+1}}$$
$$\sim 10^{-27}\,\mathrm{sec}\left(\frac{M_{BH}}{M_*}\right)^{\frac{n+3}{n+1}} \tag{10}$$

で与えられる．したがって，加速器で生成されたブラックホールはあっという間にホーキング放射によって崩壊する．ホーキング温度以下の質量を持つすべての素粒子がホーキング放射として放出されるので，ブラックホールの生成は加速器の検出器に他のプロセスと区別できるシグナルを残す．LHC 実験では，例えば，エネルギーの高い（数 100 GeV）電子や光子が放出される反応が標準理論に比べて 100 倍以上検出される可能性があり，LHC 実験が始まると TeV 重力理論の検証が行えると期待される．

4.2 宇宙線によるブラックホール生成

TeV 重力理論で予言されるブラックホール生成は加速器だけではなく地球の大気中でも起こると期待される．宇宙線の大部分は陽子なので超高エネルギー宇宙線（エネルギーが 10^{9-12} GeV）が大気の原子核と衝突するときに加速器の場合と同じようにブラックホールが生成され，さらにそれが蒸発してたくさんの粒子を生成し，空気シャワーと呼ばれる現象を引き起こす．ただし，宇宙線が陽子の場合ブラックホール起源の空気シャワーの

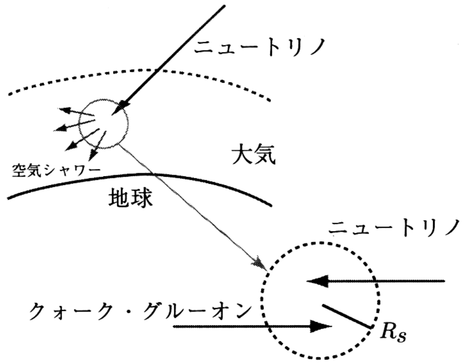


図4 宇宙線ニュートリノによるブラックホールの生成.

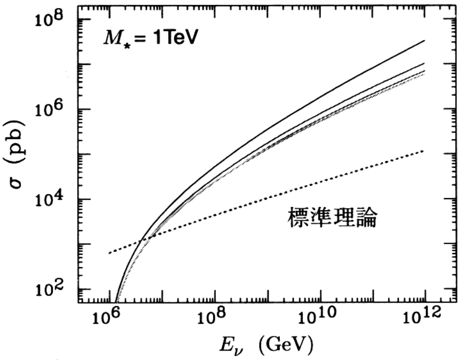


図5 宇宙線ニュートリノによるブラックホールの生成の断面積[5]（単位は pb= 10^{-9}cm^2）. E_ν はニュートリノのエネルギー. 実線は上から $n = 1, \cdots, 7$, 点線は標準理論でのニュートリノ反応の断面積.

イベント数は標準理論で期待されるシャワー・イベントと比較しては多くないので宇宙線陽子と大気との反応はTeV重力を検証する上であまり有用ではない.

TeV 重力理論を確かめるためにもっと重要なのは超高エネルギーの宇宙線ニュートリノと大気の衝突で作られるブラックホールである. 図 4 で示したように, 高エネルギーの宇宙線ニュートリノが大気中の原子核の中のクォークまたはグルーオンと衝突する際, 重心系でのエネルギーで決まるシュバルツシルト半径の中に 2 つの粒子が入るとブラックホールが生成される. このニュートリノによるブラックホール生成と比較すべきなのは標準理論で起きるニュートリノと原子核とから荷電レプトンが作られる反応であるが, 図 5 から分かるようにニュートリノのエネルギーが高いときにはブラックホールを生成する反応の断面積が大きく, ニュートリノによる空気シャワーの観測から TeV 重力の検証ができる可能性がある. 現在, 空気シャワー観測をする大規模な実験としてオージェ (Auger) 実験が進行しており, ブラックホール生成に関して情報が与えられることが期待されている.

5. まとめ

我々の宇宙が 4 次元時空ではなくもっと多次元の時空であるという可能性は, 近年の超弦理論の出現・発展によって現実的なものとして真剣に考える問題になってきている. 特に, 超弦理論におけるブレーンの存在は我々を含む標準理論の素粒子が 4 次元のブレーンに住み, 重力だけが多次元を伝わることができるという新しい世界観 (ブレーン・ワールド) を生み出した. その場合, 余次元のサイズは従来考えられていたものより大きくてもよく, 多次元での重力の基本的スケールが TeV 程度になるという可能性がある. この TeV 重力は短距離でのニュートンの法則の変更や加速器での重力子生成, さらにはブラックホールの生成など非常に興味深い現象を引き起こし, 将来の実験・観測によってその検証が行われる期待がある.

参考文献

1) 超弦理論の一般解説書としては, B. Greene, "The Elegant Universe" (Vintage Books 1999), 邦訳：ブライアン・グリーン『エレガントな宇宙』林一, 林大訳, (草思社, 2001 年)
2) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 086004.
3) S. Cullen, M. Perelstein and M.E. Peskin, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 055012.
4) S. Dimopoulos and G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 161602.
5) J.L. Feng and A.D. Shapere, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 021303.

（かわさき・まさひろ, 東京大学宇宙線研究所）

ブレーン宇宙とインフレーション理論

姫本 宣朗

インフレーション宇宙は，ビッグバン宇宙が抱えていた深刻な問題を解消する宇宙モデルとして人々の心をとらえ，数々の研究者によってその実現可能性や理論的予言について調べられてきた．そして佐藤勝彦やグース[1]によって提唱されてからおよそ20年たった現在，宇宙論的観測事実によって大きな支持を得たことからも，インフレーション理論は，実証された理論として，いまや標準宇宙論の一部として認識されるまでに到っている．この稿ではブレーン宇宙という新たな宇宙像の中で，インフレーションが宇宙論的にどのような示唆を与えるのか，またこのような宇宙像を考えることによって，インフレーションモデルそのものに対して，新たな認識を与える可能性について紹介したい．

1. インフレーション宇宙論

宇宙論におけるインフレーションとは，宇宙の創生から間もない頃に起こった，急激な宇宙膨張のことを指す．そしてこの急激な膨張から，それを可能とさせるエネルギーがやがて解放し，火の玉状態の宇宙，すなわちビッグバン宇宙へ移っていく過程を説明したのがインフレーション理論である．本節ではどのような背景で，インフレーションが導入されたアイデアなのか，また観測的にどれだけ支持されているものなのかについて説明し，ブレーン宇宙でインフレーション理論を考える意義を与えたいと思う．なお，インフレーション宇宙論をより理解する文献として，本誌掲載の解説記事など[2]を参照してほしい．また宇宙論全般を理解する読み物ならびに参考図書を二三[3]挙げておく．

1.1 地平線問題，平坦性問題

現在我々が観測する宇宙は，膨張し，一様等方な2.7 Kの宇宙背景放射によって満たされている．この事実は，過去において宇宙は小さく，高温・高密度の宇宙が実現していたことを意味し，その名残りとして宇宙背景放射を現在観測していることになる．このように高温・高密度の宇宙，いわゆる火の玉状態から始まったとして宇宙の歴史を説明するビッグバン宇宙モデルは，これまでの観測結果や宇宙に存在する水素，ヘリウムなどの存在比を定量的に説明できたことから，宇宙論の中でその地位を不動のものとした．

このようなビッグバン宇宙の進化は，一様等方を仮定した膨張宇宙モデルであるフリードマン宇宙によってうまく説明されるが，どこを見回しても同じ温度として観測される宇宙背景放射や宇宙がほぼ平坦であるという観測事実を踏まえて，フリードマン宇宙ならびにその発展方程式（フリードマン方程式）を考察すると，原理的な問題が発生することがわかった．ビッグバン理論が抱えるこの問題は，地平線問題，平坦性問題と呼ばれている．これらの問題は，フリードマン宇宙の中で

の因果領域とフリードマン方程式を考えることによって，その問題点が明白になる．フリードマン方程式は，一様等方な時空を，時空間の2点間の距離を決める計量と呼ばれる量を使って，

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \times \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{1}$$

として表すことで，

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \tag{2}$$

で与えられる．ここで $a(t)$ は，スケール因子と呼ばれる空間の2点間の距離を時間とともに引き伸ばす，すなわち膨張を表している関数であり，H はその膨張率を表している．またその逆数 H^{-1} に光速度を乗じたものは，展型的な宇宙の大きさを与えるものである．G はニュートン定数である．K は，空間の曲率を表現しているもので，$K=0, \pm 1$ の自由度がある．それぞれに関して，$K=0$ は，平坦な空間（三角形の内角の和=180度），$K=1$ は閉じた空間（三角形の内角の和 >180度），$K=-1$ は開いた空間（三角形の内角の和 <180度）を表している．ρ は，物質のエネルギー密度で，エネルギー保存則から

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + p) = 0 \tag{3}$$

を満たす．ここで p は物質の圧力である．

地平線問題は，現在の宇宙の大きさ約3000メガパーセク（1パーセクは約3光年）にわたって一様である宇宙背景放射が，フリードマン宇宙では説明できない問題である．現在観測される宇宙背景放射は，宇宙の晴れ上がり時（宇宙が誕生して約38万年．これ以降，光は周りの物質に散乱されずに走り続けることができる）における，3000Kの放射が宇宙膨張によって冷えた結果として，2.7Kの放射として観測されているものである．そこで，現在の宇宙の大きさを晴れ上がり時まで戻したときのサイズと，宇宙の誕生から晴れ上がり時までに物質間の相互作用ができる限界領域（地平線）を

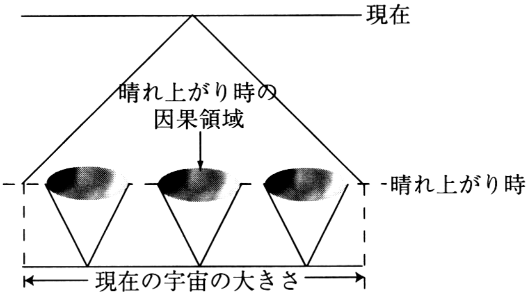


図1　地平線問題の概念図.

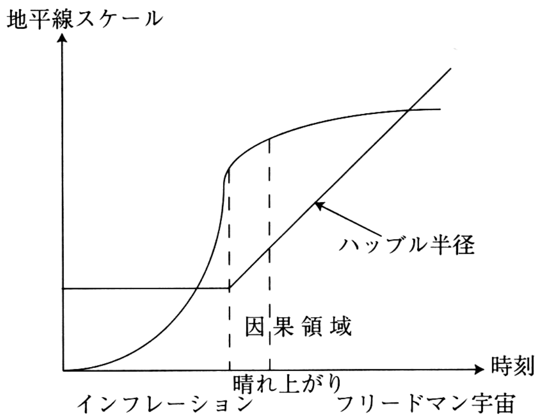


図2　ハッブル半径とスケール因子の変化.

比較すると，フリードマン宇宙では，前者が後者より大きいことがわかる（図1参照）．それぞれの時間的振舞いを考えてみると，晴れ上がり時より少し以前から現在までがそうであるように，宇宙が圧力の無視できる（$p=0$）非相対論的物質で満たされたフリードマン宇宙では，(3) 式から $\rho = a^{-3}$ となり，$K=0$ とおいて (2) 式を解くと，スケール因子が $t^{2/3}$ として振る舞うことがわかる．一方，地平線は，ほぼ宇宙の大きさ $H^{-1} = a/\dot{a}$ として表されるので，t に比例した関数として振る舞う．つまり，2点間の距離を決めるスケール因子と地平線の時間に関するべき指数が異なることから，過去に時間を遡っていくと，現在の宇宙の大きさ（ハッブル半径）は，晴れ上がり時において必ず地平線を超えることがわかる（図2参照）．このように，図1のような因果領域を超えた放射の一様性をフリードマン宇宙では説明できないことを，我々は地平線問題と呼んでいる．

平坦性問題は，これまでの宇宙論的観測から宇宙がほぼ平坦であるという事実とフリードマン方程式から帰結される問題である．フリードマン方程式は，宇宙の膨張速度を決める方程式であるが，その中で K に比例する曲率項は，その初速度を与えるものであるため，宇宙年齢などに大いに影響を与える．そしてそれは，スケール因子の２乗に反比例して寄与する項である．それゆえに，宇宙が平坦である，つまり現在においてすでに曲率項による寄与が小さいという観測結果を説明するためには，宇宙の始まりにおいて曲率項は，極端に小さな値でないといけないことがわかる．このように，どうしてそんなにまで精度よく平坦な宇宙として始まったのかという問題に，ビッグバン理論は何も示唆を与えることはできない．このことを我々は平坦性問題と呼んでいる．

1.2　インフレーション

さてこれらの問題は，どのようにして解決できるのであろうか？ そこで登場するのがインフレーションである．インフレーションは，冒頭で述べたように急激な宇宙膨張のことである．これが起こった時期を宇宙の初期に応用すると，これらの問題はとたんに解決することがわかる．定性的に考えてみると，インフレーションによって，宇宙の初期において地平線内にあった因果的に結びついていた領域が，一気に地平線を越えたスケールまで引き伸ばされ，宇宙の一様性を説明するのである．つまり，図１のような宇宙の始まりにおいて，それぞれのある領域が成長して，晴れ上がり時の一様性を創っていると考えるのではなく，宇宙のある一つの領域が急激に引き伸ばされて一様性を創り出すと考えるのである．また平坦性問題に関しては，曲率項がスケール因子の２乗に反比例することからも，たとえ適当な量を持っていたにしても，インフレーションによって無視することができるようになる．つまり，曲率項に対する初期条件をいい意味で曖昧にすることができるのである．

このように原理的に問題を解決できるインフレーションが，どのような状況で起こるのか考えてみよう．そこで，仮定として宇宙が，$\rho = -p$ の状態方程式を満たす物質によって，満たされているとしよう．そのとき，エネルギー密度 ρ は，(3) 式より時間的に一定となり，フリードマン方程式 (2) より H 一定から，スケール因子が指数関数的に振る舞う解が得られることがわかる．例えば $K = 0$ の場合を考えると，$a(t) \propto \exp(Ht)$ が容易に得られる．この時空は，ドジッター時空と呼ばれているもので，正の宇宙項が支配的な宇宙において実現する宇宙である．事実，宇宙項の状態方程式は，$\rho = -p$ として表される．そしてこのドジッター宇宙は，H 一定から宇宙の大きさである H^{-1}（ハッブル半径）が一定という性質を持つ．このことを考慮して，インフレーションからフリードマン宇宙へのハッブル半径の変化とスケール因子の変化を描いたものが図２である．インフレーションが存在することで地平線問題が解決していることが窺い知れる．

さて我々が現在観測するような宇宙を得るためには，このようなドジッター宇宙から，ビッグバン宇宙へ移行していく過程を考えなくてはならない．つまりこのことは，宇宙を満たす物質が，最初は宇宙項のように振る舞い，やがてそのエネルギーが宇宙へ解放されることで，インフレーションからビッグバン宇宙へと導く，ダイナミクスを持った理論を考えなくてはいけないことを意味している．このようなインフレーション理論として最初にその可能性を，大統一理論の観点から提唱したのが，佐藤勝彦やグース[1)]である．彼らは，宇宙初期に存在する真空のエネルギーに注目し，そのエネルギーによってインフレーションさせ，ヒッグス場に関連した真空の相転移によって熱エネルギーが開放され，ビッグバン宇宙を再現するモデルを提唱した．しかしながら相転移終了に伴う諸々の問題によって，現実の宇宙を説明するモデルとしては不十分であった．その後，彼らのインフレーションシナリオのエッセンスを汲み取り，たくさんの研究者によって，素粒子論の観点から様々なモデルが提唱されてきたが，今のところ統一的なコンセンサスは得られていない．

宇宙の歴史の中で，インフレーションが必然かつ自然に起こることを説明できるモデルを構築することは大きな問題であり，超重力理論などを用いたモデル作りが精力的に行われているが，モデルの大半は，相転移に伴う何らかのスカラー場のダイナミクスを用いて，インフレーション宇宙からビッグバン宇宙を説明するモデルである．このスカラー場はインフレーションを引き起こす場ということでインフラトン (ϕ) と呼ばれている．インフラトンのエネルギー密度と圧力は，

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \tag{4}$$

のように表される．そこで，インフラトンのダイナミクスを与えるポテンシャル $V(\phi)$ として，図 3 で与えられるようなものを考えることにする．図から見て取れるように，最初インフラトンは，ポテンシャルの勾配が小さいためゆっくり変化し，運動エネルギーの項 $\dot{\phi}^2$ が無視できるようになる．そのときインフラトンの状態方程式は，(4) 式よりポテンシャルエネルギーが支配的になり，$\rho_\phi = -p_\phi$ となってインフレーションを引き起こすことができる．つまりゆっくり転がるインフラトンは，宇宙項として宇宙の発展に寄与する．やがて時間がたち勾配が無視できなくなると，運動エネルギーが無視できなくなりインフレーションが終了する．さらにその後，インフラトンはポテンシャルの底で振動を始めるようになり，その時期ごろからインフラトンと物質場の相互作用が効き始め，エネルギーを解放し，熱いビッグバン宇宙を導く．前述したように，このようなインフラトンのダイナミクスを決定するポテンシャルを完全に説明するインフレーションモデルは完成されていないが，インフレーション理論それ自身は，インフラトンのダイナミクスによって，インフレーション宇宙からビッグバン宇宙への過程を説明するのである．

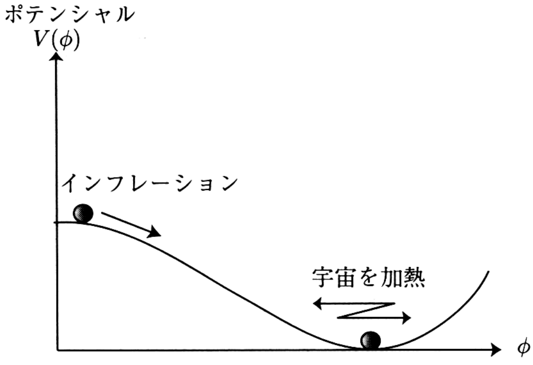


図3 インフラトンのダイナミクス．

この節の最後に，インフレーション理論が，観測的に裏付けられた理論であることについてコメントしておく．ビッグバン理論には，これまで述べた以外に密度揺らぎの起源の問題がある．宇宙には銀河や銀河団のような大規模構造が形成されているが，これらは宇宙初期に仕込まれた密度揺らぎが成長して創られたと考えられている．しかしながら地平線問題同様に，大規模構造を形成するためには，地平線スケールを越えた初期密度揺らぎを創らなくてはならないことがわかっている．この問題に対してインフレーション理論は，インフラトンの量子揺らぎがインフレーションによって引き伸ばされ，それによって大規模スケールの密度揺らぎを生成することを予言する．この密度揺らぎは，等方的であった宇宙背景放射にほんの僅かながらの温度揺らぎを生成させる．その揺らぎのパターンは，NASA によって打ち上げられた観測衛星 COBE や WMAP によって観測され，その結果はインフレーション理論が予言するものにほぼ一致したのである．こうしてインフレーション理論は，いっきに実証された理論として標準宇宙論の一部として認識されるようになったのである．

ここまでの話が通常の 4 次元インフレーション宇宙論として展開されるものである．このような豊富な宇宙論的結果を導くインフレーションを，ブレーン宇宙に応用するとどのような示唆が得られるのであろうか？

2. ブレーン宇宙

前節で，我々の宇宙を記述する宇宙モデルとして，フリードマン宇宙やドジッター宇宙を用いて，

インフレーション宇宙論を展開してきた．それぞれの宇宙モデルは，4 次元アインシュタイン方程式であるフリードマン方程式 (2) の解として得られるものであった．このように宇宙論は重力理論の枠組みの中で記述されるものであり，ブレーン宇宙論でもそれは同様である．ブレーンワールドは，我々を構成しているような物質場が，4 次元ブレーン宇宙のみに閉じ込められ，重力のみが余剰次元を含めた空間全体にわたって相互作用できる高次元時空モデルであった．このことは，ブレーン宇宙における重力理論が 4 次元アインシュタイン理論として記述されないことを予想させる．

もっとも単純な例としてニュートン重力について考えてみよう．ニュートン重力は，電磁気力からの類推で考えることができる．電場の強さは，単位面積あたりを貫く電気力線の量によって表現されることから，電荷を囲む表面積，つまり 3 次元空間の中では電荷からの距離の 2 乗に反比例した力として与えられる．ここで電気力線を重力力線に置き換え，空間 4 次元の場合を考えてみると，表面積は質点からの距離の 3 乗で表されるので，重力は質点からの距離の 3 乗に反比例した力として与えられる．このように余剰空間が 1 つ増えるだけで，ニュートン重力は変更されることがわかる．

さてこのような性質を持つ重力に対して，我々の宇宙に矛盾しない高次元時空モデルを得るためにはどのようなモデルを考えればよいのだろうか？一番容易に思いつくモデルは，余剰空間のサイズが小さい高次元時空モデルである．このようなモデルでは，余剰空間のサイズより十分大きなスケールを考えると，質点を囲む表面積は，ブレーン上の距離の 2 乗によってほぼ決定されることがわかる．逆に余剰空間のサイズより小さなスケールを考えれば，表面積はほぼ距離の 3 乗で決定されるので，その力は距離の 3 乗に反比例した力として与えられる．これまでの重力の実験では 0.1 mm までニュートン重力が再現されていることがわかっているので，余剰次元の大きさを少なくとも 0.1 mm 以下とした高次元時空モデルを考えればよいことになる．

もう一つの高次元時空モデルに対するアイデアは，空間の幾何を応用したモデルである．上で述べたモデルは，暗に余剰空間を含めてすべて等方的であることを仮定したモデルである．そこで余剰空間のみに非等方性を導入すると，余剰次元のサイズを十分大きくとっても，実効的には小さくできるのである．直感的であるが，前節に出てきた時間とともに変化するスケール因子に対して，余剰次元座標に依存したスケール因子を含む計量を持った時空を想像してもらえればよい．

このような空間の幾何の性質を利用して，ブレーン上にニュートン重力を再現させる 5 次元時空モデルを提唱したのがランダールとサンドラム[4)]である．そのモデルは，ブレーンの表面張力を考慮に入れ，5 次元方向の非等方性を生み出す負の宇宙項を含んだ 5 次元アインシュタイン方程式の解として得られたものである．つまり，宇宙論として大切であった，重力理論が考慮されているモデルである．さらに空間の非等方性のおかげで，5 次元座標を無限大にとっても物理的に有界な大きさが得られ，5 次元空間をコンパクト化するための 2 枚目のブレーンを必要としない，ブレーン 1 枚の高次元時空モデルなのである．このように，一つ目のアイデアに対して余剰次元空間をコンパクト化するメカニズムを考える必要がないランダール–サンドラムモデルは，宇宙論や相対論を研究する人たちにとって，十分に解析に耐え得るモデルとして認識され，たちまちブームになったのである．

それではランダール–サンドラムモデルの下で，ブレーン宇宙論を考えてみよう．ブレーン宇宙のフリードマン方程式は，5 次元アインシュタイン方程式をブレーン面に射影することによって得られ，

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho\left(1+\frac{2\pi G l^2}{3}\rho\right)+\rho_d\right] \quad (5)$$

として与えられる[5)]．ここでは簡単のため $K=0$ の平坦なブレーン宇宙を考えた．ここで l は，5 次元時空の曲率半径であり，5 次元方向の典型的な大きさと思ってもらえればよい．(2) 式と見比べると，その変更点は，エネルギー密度 ρ に関して非線形項が現れることと，5 次元時空（バルク時空）

の幾何学的情報が射影されてブレーン宇宙に寄与する項 ρ_d が現れることである．この項は，a^{-4} として振る舞うことから暗黒輻射と呼ばれているものである．因みに輻射の状態方程式は $\rho = p/3$ で，(3) 式に代入すると a^{-4} が得られる．

それではこの変更されたフリードマン方程式の下で，インフレーションを考えてみよう．まず初めに，ブレーン宇宙の大きさ H^{-1} が l に比べて十分大きいような場合（$Hl \ll 1$）を考えてみる．この場合は，H が ρ の1次によって決まるような場合で，そのとき ρ の非線形項は，H^2l^2 程度となって無視できることがわかる．またインフレーションの状況下では，暗黒輻射の項は a^{-4} に比例することから無視することができる．その結果ニュートン重力の例で見たように，5次元空間の大きさ l に比べてブレーン宇宙の大きさ H^{-1} が十分大きい場合には，フリードマン方程式も通常の4次元フリードマン方程式に帰着される．またインフラトンのダイナミクスも変更を受けないので，結果的に4次元理論と同様のインフレーション理論が展開されることになる．

では逆の場合はどうだろうか？ そのような状況は，インフレーションが起きたときの宇宙の大きさがまだ l 程度，もしくはそれより小さいような場合に考えられる．そのような状況では，非線形項による影響を考慮しなくてはならなくなり，それは観測的に影響を与えることになる．前節で述べたインフラトンの量子揺らぎによって生成される密度揺らぎの振幅は，インフレーション時の H によって与えられることがわかっている．それゆえに，非線形項の補正分，揺らぎは増幅されることがわかる．またインフレーション中に重力波の揺らぎも量子揺らぎを起源に生成されることが知られており，それについても同様に増幅される[6)]．このように，ブレーン宇宙のインフレーションを考えると，観測との比較で得られるインフレーションモデルに対する拘束条件は，従来とは違うものを与える可能性が出てくることがわかる．

3. 5次元スカラー場とブレーンワールド・インフレーション

統一理論の低エネルギー極限として予測される重力理論は，アインシュタイン重力に加えてディラトンと呼ばれるスカラー場を含むような，スカラー重力理論を予言している．この節では，このような5次元重力としてアインシュタイン・スカラー重力理論を考慮した場合に，ブレーン宇宙にインフラトンを導入せずともインフレーション宇宙が実現可能であることについて解説し，このようなモデルが，インフレーション理論に対して新たな解釈を与えることについて言及する[7)]．

5次元スカラー場（バルクスカラー場 φ）が存在した場合の，フリードマン方程式は，

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}[\rho_\varphi + \rho_d] \tag{6}$$

で与えられる．ここで ρ_φ は，バルクスカラー場がブレーン宇宙に射影されたことによって現れる，ブレーン宇宙の実効的なスカラー場のエネルギー密度であり，(4) 式で表されるような単純な形はしていない．またバルクスカラー場は，ブレーン宇宙には閉じ込められていないので，(5) 式で出てきた非線形項の寄与は現れない．ρ_d の項は，前と同様にバルク時空の情報を担う項であるが，バルクスカラー場による5次元時空への反作用があるため，輻射としてではないダイナミクスを持つ．

インフレーションは，基本的には4次元理論と同様に，ρ_φ に含まれるポテンシャルエネルギーが，(6) 式の右辺の中で，支配的になることによって起こる．しかしながら，このような条件を満たす条件は，単に4次元理論のようなスカラー場がゆっくり変化するという条件だけでは成立しない．今の場合，ブレーン宇宙のインフレーションはバルクスカラー場のダイナミクスによって起こるので，バルクスカラー場がブレーン宇宙でゆっくり変化するという条件に加えて，バルク時空の中で正則であること，さらには，バルクスカラー場のダイナミクスの反作用として生成される ρ_d による寄与が小さくなくてはならないことを考慮に入

れて，バルクスカラー場の方程式をバルク時空の中で解かなくてはいけない．これまでの研究によると，これらの条件を満たす解が，適切なポテンシャルにおいて存在することがわかっており，バルクスカラー場によって，ブレーン宇宙にインフラトンを導入しなくてもインフレーションが起こせることがわかった．特に，ブレーン宇宙の大きさが5次元方向の大きさに比べて十分大きい場合においては，バルク時空の反作用として生成される ρ_d ならびに p_d の寄与を含めて，ブレーン宇宙のエネルギー密度と圧力は，(4) 式で与えられ，まったく同じ4次元インフレーション理論を再現することがわかっている．

このモデルの特筆すべき点は，5次元重力場のダイナミクスによって（スカラー重力理論としてのバルクスカラー場のダイナミクスとその反作用を考慮したという意味で)，ブレーン宇宙のみにインフレーション宇宙を導く点である．相転移を担うスカラー場としてインフラトンが導入されるモデルに対して，高次元重力場のダイナミクスの結果として理解できる，新たな可能性を持ったインフレーション理論が，ブレーン宇宙では考えることができるのである．

4. 結び

ブレーン宇宙は，統一理論の候補とされる超弦理論によってその存在が示唆された宇宙像である．インフレーション理論は，宇宙論の中で，観測的に実証可能な，もっとも宇宙の誕生の瞬間にまで迫ることのできる理論である．そして具体的なインフレーションモデルの構築まで含めた理論の完成は，統一理論の観点から最終的には決着されるであろう．今後我々は，WMAP などに代表されるような高精度の宇宙論的観測や，宇宙誕生の瞬間の情報を直接的に手に入れることを原理的に可能にする重力波観測によって，具体的なインフレーションモデルの重要な情報やブレーン宇宙の痕跡を見出すことが可能になるかもしれない．それゆえに，今後の宇宙論的観測を考慮に入れたブレーン宇宙におけるインフレーション理論の研究は，統一理論に対して重要な示唆を与えることができると期待しつつ，この稿を閉じることにする．

参考文献

1) K. Sato: *Mon. Not. R. astr. Soc.* **195**, 467 (1981); A. Guth: *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981).
2) 横山順一：数理科学．**NO.476**, 26–32 (2003).（本別冊に再録）; A. Liddle and D. Lyth: 'Cosmological Inflation and Large-Scale Structure', Cambridge University Press, Cambridge, England (2000).
3) 杉山　直：『膨張宇宙とビッグバンの物理』，岩波書店 (2001); 二間瀬敏史：『なっとくする宇宙論』，講談社 (1998); E. Kolb and M. Turner: 'The Early Universe', Addison-Wesley Publishing Company.
4) L. Randall & R. Sundrum: *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
5) T. Shiromizu, K.I. Maeda & M. Sasaki: *Phys. Rev.* **D62**, 24012 (1999); 白水徹也：数理科学．**NO.476**, 13–18 (2003).（別冊「スーパーストリング」に再録.）
6) R. Maartens, D. Wands, B. Bassett & I. Heard: *Phys. Rev.* **D62**, 041301 (2000).
7) S. Kobayashi, K. Koyama & J. Soda: *Phys. Lett.* **B501**, 157 (2001); Y. Himemoto & M. Sasaki: *Phys. Rev.* **D63**, 044015 (2001); J. Yokoyama & Y. Himemoto: *Phys. Rev.* **D64**, 083511 (2001); N. Sago et al.: *Phys. Rev.* **D65**, 024014 (2002); M. Minamitsuji et al.: *Phys. Rev.* **D68**, 024016 (2003); K. Koyama & K. Takahashi: *Phys. Rev.* **D67**, 103503 (2003).

（ひめもと・よしあき，日本大学生産工学部）

宇宙項問題とDブレーンインフレーション

早田　次郎・菅野　優美

1. 宇宙項問題とインフレーション

When I was discussing cosmological problems with Einstein, he remarked that the introduction of the cosmological term was the biggest blunder he ever made in his life.

— George Gamow 自叙伝より —

1917年，Albert Einstein は一般相対性理論を発表した後，彼は自らの式に敢えて宇宙項 Λ (cosmological term) を

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

のように導入した*1)．なぜなら宇宙は静的なものであって，膨張も収縮もするはずがないと信じていたからだ．それから12年後，アメリカの天文学者 Edwin Hubble が遠くの銀河が我々から離れていくことを観測し，宇宙が膨張している証拠を見つける．静的であるための宇宙項はもはや必要なくなり Einstein は後に，宇宙項を捨て去り $\Lambda = 0$ とした．しかし，この観測事実を理論的に説明することには困難があった．宇宙項は Einstein 方程式を

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}\right)$$

と書き直すと，物質のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に繰り込むことができ，それは時空間のどこでも値の等しい真空のエネルギーとも解釈できるのだ．場の量子論を使って真空のエネルギーを単純に見積もると

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} = \left(10^{19}\,\mathrm{GeV}\right)^4$$

と莫大なエネルギーになってしまうのである*2)．この場の量子論による理論的予言は，観測事実と明らかに矛盾している．これが**宇宙項問題**と呼ばれる問題であった．

近年，この宇宙項問題の質が変わってきた．超新星と宇宙背景輻射観測衛星WMAPの近年の観測結果から，宇宙項がゼロではなく，プランク単位で 10^{-120} 程度の正の値

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} = \left(10^{-3}\,\mathrm{eV}\right)^4$$

を持ち，宇宙のエネルギーのほとんどを担っていることが分かってきたからである．宇宙項がゼロであれば，背後に深遠な対称性が隠れているという解決の道もあったかもしれないが，このような小さなスケールを出すような物理を見出すことはおそらくもっと難しいであろう．

1917年，オランダの天文学者 Willem de Sitter は宇宙項が支配的な場合における Einstein 方程式の解を見つけた．宇宙項が正の場合は，その解は指数関数的に膨張する宇宙を表していて，“de

*1) 光速度 = 1 の単位系を使った．

*2) $1\,\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV}$.

Sitter 時空” と呼ばれている（ちなみに，負の場合は，“anti de Sitter 時空” と言う）．de Sitter 時空はまたインフレーション宇宙の良い近似にもなっている．インフレーションとは，宇宙初期に，$\Lambda/8\pi G = (10^{16}\,\mathrm{GeV})^4$ という大きな宇宙項が短時間で引き起こす急激な宇宙膨張のことで，ビッグバンモデルの様々な概念的問題を解決し，宇宙の構造の起源を説明する．インフレーション理論は，宇宙背景輻射観測衛星 WMAP の揺らぎの観測結果からも強い支持を得ていて，素粒子モデルの中でインフレーション宇宙を実現することは理論物理学の重要な課題となっている．近年の観測によって発見された加速膨張宇宙もまた $\Lambda/8\pi G = (10^{-3}\,\mathrm{eV})^4$ という小さな宇宙項によって引き起こされたインフレーションと解釈できる．

この宇宙初期と現在の，大きさのかけ離れた 2 つのインフレーションを説明することは究極の理論の候補とされる超弦理論の主な課題となっている．

2. ことの起こり

超弦理論は，5 種類の理論で構成されている．しかし，近年の研究によってそれらが実は M 理論と呼ばれる 1 つの理論の違う状態であることが明らかになってきた．ここで重要なことは，M 理論は 11 次元，超弦理論は 10 次元でのみ整合性を持つということである．つまり，究極の理論は余剰次元が存在することを予言している．

アメリカ，カリフォルニア大学バークレー校の Raphael Bousso とサンタバーバラ校 Kavli 研究所の Joseph Polchinski は小さな宇宙項を，M 理論から出てくる 4 階の反対称場 F_4 を離散化することで実現できるというアイディアを出した．

F_4 は電磁場を拡張したもので，究極の理論の候補とされている M 理論の中に組み込まれている物理量である．彼らは，我々の世界は最初に宇宙項 Λ_0 が負になるような，あるスカラー場のポテンシャルの深い井戸の底にいると仮定した．彼らの議論は 4 次元の有効理論

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa^2}R - \Lambda_0 - \frac{1}{2\cdot 4!}F_4^2\right)$$

から出発する．この作用から F_4 に関する方程式を求め，それを解いてアインシュタイン方程式に代入することで宇宙項が

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{1}{48}F_4^2 = \Lambda_0 + \frac{c^2}{2} \qquad (1)$$

と求まる*3)．F_4 は正の宇宙項として寄与することがわかる．ここで c が任意の実数であると，Λ_0 とうまくつり合わせることによってゼロの宇宙項が得られる可能性がある．しかし，我々が観測から欲しい値は $10^{-120}M_{\mathrm{pl}}^4$ である*4)．F_4 の効果が連続的である限り，このような小さな値は自然には得られない．彼らは F_4 が実際には離散化され $c = nq$，（n は自然数）となることに着目した．F_4 が飛び飛びの値を取るとき，宇宙項が $10^{-120}M_{\mathrm{pl}}^4$ の値を取り得る可能性を求めたのである．F_4 が 1 種類だとステップ幅が大きすぎてとても $10^{-120}M_{\mathrm{pl}}^4$ という小さな値は出せないのだが，J 種類あると

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{J} n_i^2 q_i^2$$

となり，$J = 100$ くらいで十分欲しい値が出せることが分かった．この $J = 100$ という値は 11 次元の M 理論から 4 次元の理論がつくられると考えるならば，それほど不自然な値ではない．

このように M 理論起源の F_4 というものが，宇宙項問題の解決へとつながりそうだということが明らかにされた．ただし，内部空間の安定性は課題として残されている．また，インフレーションがこの枠組みの中にどう組み込まれていくのかも明らかではない．

ここで示された，F_4 が離散無限個の真空を生み出す可能性はその後の**ランドスケープ**という描像へと展開するきっかけとなった．

*3) この結果を作用から直接読み取るときは表面項を正しく考慮する必要がある．

*4) $M_{\mathrm{pl}} = 10^{19}\,\mathrm{GeV}$ はプランクエネルギー．

3. ストリング・ランドスケープ

超弦理論の特徴は理論の特徴的なスケールが紐の長さを表す ℓ_s1 つしかないということにある．余分なパラメータが入らないというのが，超弦理論の鮮やかな点であり，“Theory of everything” と呼ばれる所以でもある．しかし，これでは我々の 4 次元世界における多様性は生まれない．我々の 4 次元世界の多様さは，10 次元の世界から 6 次元部分が小さく丸まって（コンパクト化）見えなくなり 4 次元の世界を実現する仕方の多様性にその起源がある．この 6 次元コンパクト空間は “**カラビ・ヤオ空間**” として知られている空間のクラスである．カラビ・ヤオ空間は非常に多種多様で少なくとも 10,000 種類は存在すると言われている．それらは，カラビ・ヤオ空間の形や大きさを特徴づける “**モジュライ**” と呼ばれる多くのパラメータで定義される．それぞれ違うモジュライの値ごとに，それぞれ違う真空の値が対応している．これらの一つ一つが別々の 4 次元宇宙を表す．

これらの違う 4 次元宇宙の集合を 3 次元に描くと，2 次元をモジュライの値とし，高さを真空のエネルギーとして超曲面ができ上がる．その超曲面は波の全くない平坦な海のように見える．このままだと 4 次元の世界では，10 次元から来るモジュライが質量ゼロの粒子として振る舞う．質量ゼロの粒子は自由に動き回り，これはコンパクト化された内部空間が安定しないことを意味する．その結果，4 次元上に現れる物理定数が定数でなくなる．したがって，現在の観測と矛盾しないためにはモジュライは，基本的に固定されなければならない．弦理論における最も重要な課題は，この超曲面に起伏を作ってエネルギー最小の所にモジュライを固定することである．10 年前までは，このようにして我々の世界を記述するであろう真空は，ほぼユニークに決まり電子の質量や，電荷といった物理定数が説明できる，と研究者の間では期待されていた．しかし，でき上がったものは無数の極小値が存在する複雑な超曲面であった（図 1）.

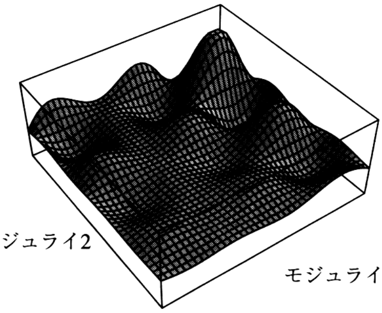


図 1 ランドスケープの概念図．エネルギーの極小値が無数に存在する．実際にはモジュライの数はもっと多くて，非常に高い次元の複雑な超曲面である．

アメリカ，スタンフォード大学の Leonard Susskind は，近年明らかになってきた，超弦理論が導くこの超曲面のことを “**ランドスケープ**” と名づけた．

4. コンパクト化と de Sitter 時空

宇宙項問題をコンパクト化された空間の安定化問題と切り離して考えることはできない．宇宙が de Sitter 時空で指数関数的に膨張するとき，6 次元の内部空間は一定の大きさに留まる必要がある．言い換えると，モジュライが固定されてできたランドスケープの中にエネルギーが正の極小値の真空を探さねばならない．そこでは我々の求める de Sitter 宇宙が実現されているからだ．

近年，スタンフォード大学の Shamit Kachru, Renata Kallosh, Andrei Linde, それからインドの Tata 研究所の Sandip Trivedi（KKLT）がそういった解を TypeIIB 超弦理論の場合に具体的に構成した．その方法自体は既に弦理論研究者たちによって開発されていたものだったが，彼らは違ったテクニックをうまく組み合わせたのである．これは，超弦理論の枠組みで宇宙項問題を解決するための大きな一歩である．以下に詳しく見ていこう．

4.1 TypeIIB 超弦理論

TypeIIB 超弦理論の低エネルギー有効作用の主

要部は

$$S_{\mathrm{IIB}} = \frac{1}{(2\pi)^7\ell_s^8}\int d^{10}x\sqrt{-\mathcal{G}^{(10)}}$$
$$\times\left[e^{-2\Phi}\left\{\mathcal{R}_s+4\left(\partial\Phi\right)^2-\frac{1}{12}H_3^2\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\partial C\right)^2-\frac{1}{12}\tilde{F}_3^2-\frac{1}{240}\tilde{F}_5^2\right] \quad (2)$$

のように10次元の重力場 $\mathcal{G}^{(10)}$，ディラトン場 Φ，アキシオン場 C，3種類の反対称場 H_3，$\tilde{F}_3$，$\tilde{F}_5$ から構成される．これらの反対称場は反対称ポテンシャル B_2, C_2, C_4 を使って

$$H_3 = dB_2,$$
$$\tilde{F}_3 = F_3 - CH_3 = dC_2 - CH_3,$$
$$\tilde{F}_5 = dC_4 + C_2 \wedge H_3$$

のように表される．これらは電磁場テンソルと4元ベクトルポテンシャルをそれぞれ拡張したものであると思ってよい．$\mathcal{R}_s$ は $\mathcal{G}^{(10)}$ からつくられる曲率スカラーである．

p 次元の空間的拡がりを持った物体である Dp ブレーンがある場合はボルン・インフェルト作用

$$S_{\mathrm{Dp-brane}} = -T_p\int d^{p+1}xe^{-\Phi}\sqrt{-G}$$
$$+\mu_p\int C_{p+1} \quad (3)$$

も付け加えておく必要がある．ここで，T_p は Dp ブレーンが持つ**張力**である．Dp ブレーンはゲージ場 C_{p+1} と相互作用していて，その**電荷**は μ_p で与えられる．これらの値は

$$T_p = \mu_p = \frac{1}{(2\pi)^p\ell_s^{p+1}} \quad (4)$$

と決まっている．

4.2 コンパクト空間の安定性

コンパクト空間の安定性を見るために，このTypeIIB 超弦理論の枠組みでモジュライがどのように固定されるのかをまず見ていこう．モジュライは，それが作り出すポテンシャルが極値を持つときに固定される．10次元超弦理論をコンパクト化して，我々の4次元世界を実現する際に，方程式 (2) を構成する各項が，モジュライのポテンシャルに対して寄与する．

簡単のためにモジュライは1種類とし，TypeIIB 超弦理論の低エネルギー有効理論 (2) においてディラトン Φ をゼロにおいた場合を考える．重力部分の作用は

$$\mathcal{S} = \frac{1}{(2\pi)^7\ell_s^8}\int d^{10}x\sqrt{\mathcal{G}^{(10)}}\mathcal{R}_s$$

のように記述される．ここで6次元部分をコンパクト化すると4次元世界を記述する重力は

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\ell_4^2}\int d^4x\sqrt{-g}\ R$$

となる．$1/\ell_4^2$ は4次元重力定数とみなす．この場合，コンパクト化した空間のスケール L がモジュライとして振る舞う．コンパクト化した体積を $L^6(x) = L_0^6\tilde{L}^6(x)$ のように分けて書くと*5)，4次元プランク定数は

$$\ell_4^2 = \frac{(2\pi)^7\ell_s^8}{L_0^6} \quad (5)$$

と書ける．

モジュライのポテンシャルに対して重要な寄与を果たす項として，10次元曲率項がある．10次元の曲率は4次元の曲率と6次元曲率に分解できる．この6次元曲率は4次元の人から見るとポテンシャルに寄与する．4次元プランク定数 (5) を用いて書くと曲率からのポテンシャルに対する寄与は

$$\Lambda_{\mathcal{R}} \sim -\frac{1}{\ell_4^2L^8} \quad (6)$$

のように負の効果をもたらす．次に，反対称場の寄与を考える．電荷 Q_p を用いて書くと p 階の反対称場 F_p は4次元のポテンシャルに

$$\Lambda_F \sim \frac{Q_p^2}{\ell_4^2L^{2p+6}} \quad (7)$$

のように正の効果をもたらす．これらの2つの正負の効果によってポテンシャルは底上げされたり底下げされたりする．従ってポテンシャルは

$$\Lambda = \Lambda_{\mathcal{R}} + \Lambda_F \sim -\frac{1}{\ell_4^2L^8} + \frac{Q_p^2}{\ell_4^2L^{2p+6}}$$

*5) L_0 は長さの次元を持ち，$\tilde{L}$ は無次元とする．

となる．TypeIIB 超弦理論の低エネルギー有効理論 (2) では p の取り得る値は奇数である．モジュライ L の冪に着目すると，$p \geq 3$ の場合，モジュライが大きくなると（$L \to \infty$），曲率が効いてポテンシャルは負になり，小さくなると（$L \to 0$），反対称場が効いてポテンシャルは正になる．これは途中のある点でポテンシャルの極小値が存在することを意味する．つまりモジュライを固定することができるのである．宇宙項は最終的に出てきたこのモジュライポテンシャルの極値から読み取ることができる．ここでの宇宙項は負であり，真空は anti de Sitter 時空となってしまう．これは解決するべき課題である．

モジュライが 1 種類の場合はこのようにして固定されることが分かった．ではモジュライがたくさんある場合はどのように考えるのであろうか．

4.3 超弦理論の中の de Sitter 時空

カリフォルニア大学サンタバーバラ校の Steven B. Giddings と前にも登場した S. Kachru，そして J. Polchinski の 3 人（GKP）は反対称場やブレーンの性質をうまく利用して，たくさん存在するモジュライを固定できるというアイディアを出した．彼らはモジュライが固定された 6 次元カラビ・ヤオ空間はいくらでも作り出せることを示した．一般には，カラビ・ヤオ空間は反対称場によってワープしていることもわかった．しかし，多くのモジュライを扱うことに成功はしたものの，GKP が構成した真空もまた de Sitter 時空ではなく負の宇宙項を持つ anti de Sitter 時空であった．

de Sitter 時空を超弦理論から導くためには，超対称性をうまく破って正の宇宙項を持つような真空を見つけなくてはならない．このような状況の中，重要な解の構成法を提案したのが，前にも述べた KKLT である．彼らは de Sitter 時空をつくるために，$D3$ ブレーンとは反対の電荷を持つ $\overline{D3}$ ブレーンをワープした内部空間の最小体積の部分（スロート）に置いた．電気力によって $\overline{D3}$ の位置に相当するモジュライが固定される．一方，ブレーンの張力はエネルギーに対して正の寄与をする．このようにしてエネルギーを正の値に引き上げることができることを示したのである．

しかし，このようにして de Sitter 時空を作るメカニズムを作り出せたものの，ユニークに決まると期待した真空は，期待を裏切り莫大な数だけ出てきてしまったのである．莫大な数の可能な de Sitter 時空の中から観測と合うものを選び出して宇宙項問題を解決するような理論は存在しない．そこで出てきたのが**人間原理**である．人間原理は，我々の存在そのものを，宇宙項が今観測している値をとる理由としている．もし，他の値であれば我々が存在することができない，もしくはその可能性が相当低い，というのである．この考えの是非についての議論はここではしないが，多くの研究者が人間原理に頼る必要性を説いているのが現状である．超弦理論がまだ発展段階にある以上仕方のないことかもしれない．

5. D ブレーンインフレーション

前節までに示したように，真空の数は莫大になってしまって宇宙項問題の解決には至らないものの，**超弦理論のランドスケープ**の中に de Sitter 時空は見えてきた．そこで，宇宙初期のインフレーションの問題を解決できるかどうかを見てみよう．de Sitter 時空ができたというだけでは，まだインフレーションが実現できたというには不十分である．インフレーションはやがて終わり我々の宇宙へとつながっていかねばならない．ランドスケープにインフレーション宇宙を見出すことができるのだろうか？

まず，インフレーション理論の復習から始めよう．

5.1 インフレーション

ポテンシャル $V(\phi)$ をもったスカラー場 ϕ がある場合，宇宙の大きさ $a(t)$ の時間発展を記述するフリードマン方程式は

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right)$$

で与えられる．ここで，H は宇宙の膨張率でハッブルパラメータと呼ばれている．宇宙膨張による

摩擦の効果が優勢となりスカラー場がゆっくりと変化するならば，スカラー場の運動エネルギーが無視できて，宇宙の大きさは $a \sim e^{Ht}$ と指数関数的に膨張する．これがインフレーションである．インフレーションを引き起こすスカラー場はインフラトンと呼ばれている．

スカラー場がゆっくりとポテンシャルを転がるためにはポテンシャルの傾きが十分小さいことが必要とされる．この条件を定量化するために**スローロールパラメータ**

$$\epsilon = \frac{M_{\rm pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \quad \eta = M_{\rm pl}^2\frac{V''}{V}$$

を定義する．ここで，プライムはスカラー場に関する微分を表している．$\epsilon \ll 1$,$\eta \ll 1$ であればスカラー場がゆっくりと転がりインフレーションが実現される．インフレーションの起きるこの条件をスローロール条件と呼んでいる．やがてスローロール条件が破れ，インフレーションは終わり，標準的なビッグバン宇宙へと移行するというのがインフレーション理論の大まかなシナリオである．従って，問題はこのような条件を満足するポテンシャルを超弦理論の枠組みで如何に実現するかということになる．

5.2 *D* ブレーンインフレーション

*D*3 ブレーンは 4 次元時空なので，***D* ブレーンインフレーション**のシナリオでは，我々は *D*3 ブレーン上に住んでいる．まず，10 次元空間に $n+m$ 個の *D*3 ブレーンのかたまりと m 個の $\overline{D3}$ ブレーンのかたまりが存在すると仮定する (図 2)．このときのブレーンのかたまりの間の距離 r がインフラトンの役割を果たす．電荷は逆符号なので互いに引き合って近づいていく，このときインフレーションが起きる．やがて，ぶつかって m 個は対消滅しインフレーションが終わり，n 個の *D*3 ブレーンが残る．この対消滅により再加熱が起きてビッグバンが始まる．その後の歴史は標準的な宇宙論のシナリオに従う，というのがこのシナリオの大筋である．

このシナリオでのポテンシャルは重力場と反対称場 $\tilde{F}_5$ によって作られていて，標準的な規格化

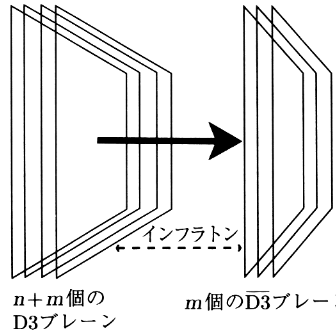


図 2　6 次元内部空間が平坦な場合の *D* ブレーンインフレーション．ブレーン間の距離 r は内部空間の大きさ L を超えることはできない．

$\phi = \sqrt{T_3}r$ のもとで

$$V(\phi) = 2T_3\left[1 - \frac{1}{2\pi^3}\frac{L^6T_3^3}{M_{\rm pl}^2\phi^4}\right] \qquad (8)$$

と書ける．ここで T_3 は *D*3 ブレーンの張力であり，L^6 はコンパクト空間の体積である．このポテンシャルから**スローロールパラメータ**を計算すると

$$\epsilon = \frac{4}{\pi^6}\left(\frac{T_3L^2}{M_{\rm pl}^2}\right)\left(\frac{L}{r}\right)^{10},$$

$$\eta = -\frac{10}{\pi^3}\left(\frac{L}{r}\right)^6 \sim -0.3\left(\frac{L}{r}\right)^6$$

となる．ブレーン間の距離 r は内部空間の大きさ L を超えることができないことを考えると，ϵ のほうはパラメータを適当にとれば $\epsilon \ll 1$ とすることができるが，η のほうは必然的に $|\eta| \gtrsim 1$ となってしまう．従って，観測と矛盾しないようなインフレーションモデルをつくることはできない．

せっかくのアイディアも駄目になってしまうのであろうか．そこへ，近年この問題を解決するメカニズムが先の KKLT とプリンストン大学の Juan Maldacena，スタンフォード大学の Liam McAllister を加えたグループによって提唱されたのである．

5.3 ワープしたコンパクト空間での *D* ブレーンインフレーション

単純なブレーンインフレーションがうまくいか



図 3 ワープ空間での D ブレーンインフレーション．全体は反対称場によって形が固定された6次元カラビ・ヤオ空間を表している．その各点に4次元空間がくっついている．その中の r_0 に $\overline{D3}$ ブレーンが，r_1 に $D3$ ブレーンが存在する．

ないのは $D3$ ブレーンと $\overline{D3}$ ブレーンの間に働く力が強すぎたからである．この力を弱めることでうまくスローロールパラメータを小さくすることを考えよう．そのためには，内部空間をワープさせて重力場と反対称場の作り出す力線の間隔を急激に広げることができればよい．具体的には，$r=0$ に置いた N 個の $D3$ ブレーンのエネルギーによって空間をワープさせる．このような時空を背景として，$r=r_1$ にある $D3$ ブレーンと $r=r_0$ にある $\overline{D3}$ ブレーンを考えれば観測と矛盾しないインフレーションモデルがつくれると期待される（図 3）．

この場合，ポテンシャルはボルン・インフェルト作用 (3) から

$$V(\phi)=\frac{4\pi^2\phi_0^4}{N}\left(1-\frac{1}{N}\frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right)$$

と求めることができる．ただし，$\phi=\sqrt{T_3}r_1$，$\phi_0=\sqrt{T_3}r_0$ と置いた．スローロール条件を調べよう．今の場合，**スローロールパラメータ**は

$$\epsilon=\frac{8}{N^2}M_{\rm pl}^2\frac{\phi_0^8}{\phi^{10}}\,,\quad \eta=-\frac{20}{N}M_{\rm pl}^2\frac{\phi_0^6}{\phi^6}$$

であり，今度は

$$\phi\gg\left(\frac{20}{N}M_{\rm pl}^2\phi_0^4\right)^{1/6}$$

となっていれば $\epsilon\ll1,\eta\ll1$ で，観測と矛盾しないインフレーション宇宙が実現できることが分かる．

このように大枠のところでは D ブレーンインフレーションはうまくいきそうである．残された大きな問題はブレーンの衝突による再加熱の過程をどう取り扱うかであるが，この問題に関してはまだ解決の糸口すら見つかってはいない．

6. おわりに

超弦理論は究極の理論なのか，それとも全く空虚な理論なのか．超弦理論が見せてくれる数学的な美しさは，この理論の正しさを強く示唆しているように思う．もちろん，数学的な美しさだけで我々の複雑な自然現象を支配する法則であるという根拠にはならない．近年明らかになってきつつある超弦理論の持つ豊かな構造の中に観測・実験と結びつく予言を見つける努力を続けていかねばならない．超弦理論におけるインフレーションの研究もまた，まだまだ始まったばかりである．

参考文献

1) J. Polchinski, String Theory I and II (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
2) R. Bousso and J. Polchinski, *JHEP* **0006**, 006 (2000) [arXiv:hep-th/0004134].
3) L. Susskind, arXiv:hep-th/0302219.
4) S.B. Giddings, S. Kachru and J. Polchinski, *Phys. Rev. D* **66**, 106006 (2002) [arXiv:hep-th/0105097].
5) S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde and S.P. Trivedi, *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003) [arXiv:hep-th/0301240].
6) S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. McAllister and S.P. Trivedi, *JCAP* **0310**, 013 (2003) [arXiv:hep-th/0308055]; E. Silverstein and D. Tong, arXiv:hep-th/0310221; M. Alishahiha, E. Silverstein and D. Tong, arXiv:hep-th/0404084.

（そうだ・じろう，京都大学大学院理学研究科）
（かんの・すぐみ，ダラム大学数理学科）

ブレーンワールドにおける宇宙論的摂動

小山 和哉

1. はじめに

宇宙論的観測は現在，急速な進展の時期にある．特に2003年のWMAP衛星による**宇宙背景輻射**の観測成果によって，精密科学としての宇宙論は更なる発展の時期を迎えたと言える．

理論的な側面から見れば，宇宙の創生や進化を探求する初期宇宙の研究は高エネルギー物理学と密接に関係している．現在の実験技術では検証不可能な高エネルギーの物理学は，数学的構造の無矛盾性を論拠に発展してきた．超弦理論はその最たるものであり，多くの斬新なアイデアを提供し，大きな成功を収め，「究極理論」の最有力候補となっている．超弦理論は10次元時空で構成される．この理論が正しいとすれば，我々の世界は4次元を超えた高次元の構造を持ち，余剰次元が存在することになる．この数年の間に劇的な進化を遂げた**ブレーンワールド**の考えも弦理論から生まれた．我々が高次元時空中に浮かぶ4次元膜（ブレーン）に住んでいるとするこのアイデアは，宇宙の創生と進化に対してもこれまでとは全く異なる新しいシナリオを提供する可能性を持っている．

しかし，超弦理論のような高エネルギーの物理学を地球上の実験で検証することは非常に困難である．一方，宇宙初期に起こった現象は実験室で作ることのできるエネルギーを遥かに超えており，宇宙論的観測は超弦理論の痕跡を残した現象を我々に示すかもしれない．近年の宇宙論的観測の精密化と現在進行中の諸計画は，宇宙の創生と進化に迫るだけでなく，宇宙を高エネルギー物理学の「実験室」として提供する可能性をも秘めている．宇宙論は宇宙の創生と進化を明らかにすると同時に，究極理論を観測によって検証するという壮大な目標を新たに持とうとしているのである．本稿では，現在の観測成果を簡単に説明し，ブレーンワールドが宇宙モデルに与える影響を考察する．そして，高次元時空の存在が宇宙論的観測に与える影響を探ってみたい．

2. 宇宙論的観測

宇宙論的観測には様々なものがあるが，初期宇宙の情報を引き出すのに適した観測は，宇宙背景輻射の観測と，背景重力波の観測である．本節ではこれらの観測，観測計画の現状を紹介する．

2.1 宇宙背景輻射

宇宙の温度が高い時期においては，電子は電離状態にある．宇宙背景輻射の光子は，この自由電子とトムソン散乱によって相互作用し，まっすぐ進むことができない．宇宙の温度が膨張によって冷え，数千Kぐらいまでになると，自由電子は原子に捕獲され（再結合）水素を形成する．これにより電離度が急激に下がり，光子はまっすぐ進めるようになる（脱結合）．この光子を，現在我々は宇

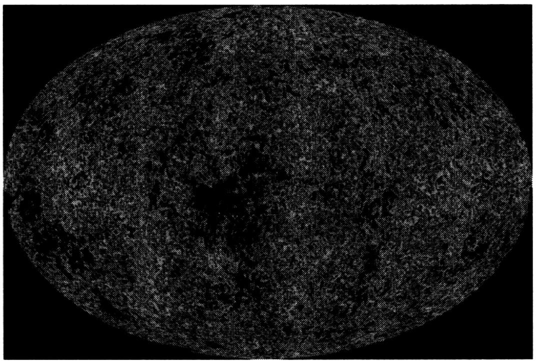


図 1　WMAP が観測した宇宙背景輻射の全天温度分布．濃淡が温度の高低を表している．

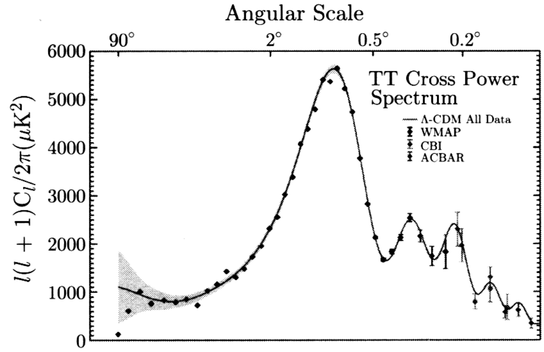


図 2　球面調和関数で展開した温度揺らぎのパワースペクトル．縦軸が温度揺らぎの振幅，横軸は角度スケールを表す．実線が宇宙論パラメーターを調節して得られた理論曲線．

宙背景輻射として観測している．脱結合後，光子はプランク分布を保ったまま，宇宙膨張によって赤方変移を受ける．そして，2.7 K の黒体輻射として現在観測されている．宇宙背景輻射の重要な性質は，輻射の温度が驚くべき精度で等方的であることにある．この観測事実から，我々の宇宙は第 0 近似としては一様等方な宇宙として記述できることが分かった．しかし現実の宇宙には銀河をはじめとする様々な構造がある．この非一様，非等方性はどのようにして説明されるのだろうか．宇宙背景輻射を詳細に観測すると，実は輻射の温度に 10^{-5} 程度の揺らぎがあることが分かった（図 1）．この揺らぎを「種」に我々の銀河は形成されたのである．2003 年，WMAP と呼ばれる衛星が非常に詳細に宇宙背景輻射を観測した[1]．宇宙背景輻射の温度揺らぎを記述するのに便利なのが，温度揺らぎの 2 点角度相関関数で，ある角度離れた輻射の温度がどの程度揺らいでいるかを測る．そのスペクトルを見ると，二つ特徴的な振る舞いが見られる（図 2）．一つは大角度スケールで揺らぎの振幅がほぼスケールによらないことである．もう一つは 2 度角あたりから振幅が振動していることにある．これらの観測事実を説明することが宇宙論の大きな目標の一つである．

2.2　背景重力波

電磁波と同じく，重力波も宇宙を満たしている可能性がある．この背景重力波は未だ検出されていない（重力波そのものが未検出である）．しかし，もし重力波が検出されれば，初期宇宙を探査する上で強力な武器になる（図 3）．輻射では，自由電子に阻まれて，脱結合時以前の宇宙の状態を見ることはできない．したがって，宇宙背景輻射は基本的に脱結合時の宇宙の大きさ程度の物理しか検証することができない．しかし重力波は電子などと相互作用しないため，原理的には宇宙が始まる瞬間を見ることができるようになる．これにより，初期宇宙の高エネルギー物理を検証することが可能になる．特に初期宇宙では宇宙の大きさ自

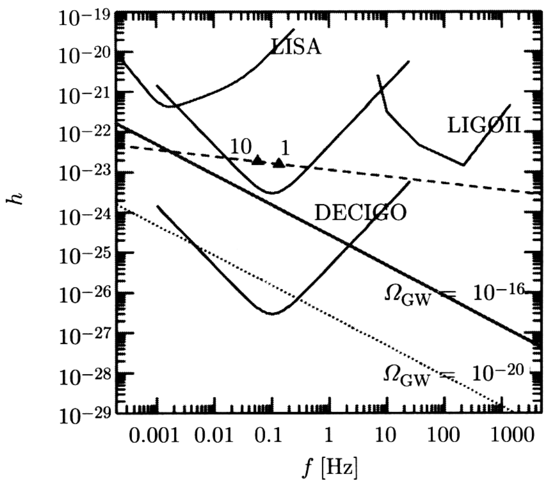


図 3　重力波のスペクトル．観測計画は実線以上の振幅を持つ重力波を探知する[2]．実線で示したスペクトルがインフレーション理論が予言する典型的なスペクトル．

体が非常に小さいため，小スケールでの物理過程が重要になる．このことは，後で見るように，ブレーンワールドを観測的に検証する上で非常に重要な意味を持つ．

3. 標準宇宙論

本節では，前節で述べた観測事実がどのように説明されるかを概観する．最も確立された理論は，**インフレーション**に基づく理論である．

3.1 揺らぎの生成

宇宙初期において，宇宙は加速度的な膨張（インフレーション）を経験したと考えられる．この宇宙の加速度膨張によって，古典的な揺らぎは一様化され，宇宙は「空っぽ」の時空になる．これにより宇宙の一様等方性は説明できる．では現在観測される宇宙背景輻射の温度揺らぎや，宇宙の大規模構造の種となる揺らぎはどのようにして生成されるのだろうか．鍵となるのは量子論的な揺らぎである．量子論的には，時空に微小な揺らぎが存在し得る．この微小な**量子揺らぎ**が宇宙の加速度膨張によって引き伸ばされ，古典的な揺らぎになると考えられている．インフレーションで作られる揺らぎの特徴は，揺らぎの振幅がスケールによらない（**スケール不変**）であることである．インフレーションで生成される時空の揺らぎには，主として2つの種類がある．一つは空間曲率の揺らぎで宇宙の密度揺らぎに関係する．これはインフレーションを引き起こすスカラー場の揺らぎによって生成される．もう一つは重力波の揺らぎで，電磁波のように偏光を持っている．この重力波が宇宙を満たす背景重力波になる．

3.2 揺らぎの進化

インフレーションで生成された揺らぎの進化を理解する上で重要な概念は**地平線**である（図 4）．地平線を超える領域では揺らぎは因果関係を持ち得ないので，他の揺らぎと物理的な相互作用をすることができない．このため，揺らぎの波長が地平線より大きいか，小さいかによって揺らぎの進化は大きく異なる．地平線より大きな波長を持つ揺らぎは，振幅を一定に保ったまま，波長が宇宙膨張によって引き伸ばされていく．大角度の宇宙背景輻射の温度揺らぎは，この波長の長い揺らぎに起因するため，インフレーションで生成された揺らぎの性質を，直接保持している[3]．観測結果（図 2）は，大角度スケールで揺らぎの振幅が，ほぼスケールによらないことを示唆している．これはインフレーションで作られる揺らぎがスケール不変であるということによってよく説明される．一方地平線より波長が短くなると，様々な物理過程が温度揺らぎに影響する．宇宙が輻射で満たされている時期に，密度揺らぎが地平線に入ると，輻射の圧力と重力のつりあいで，揺らぎの振幅は時間的に振動する．この振動によって2度角付近から始まる温度揺らぎの振動が生成される．この振動の様子は，様々な宇宙論的パラメーターに依存する．WMAP のデータはこれらのパラメーターをうまく調節することで，非常に高い精度で説明される（図 2）．これらの宇宙論的パラメーターは，宇宙背景輻射とは独立な宇宙論的観測で検証可能であり，現在の観測の精度では非常に一貫した結果を与えている．

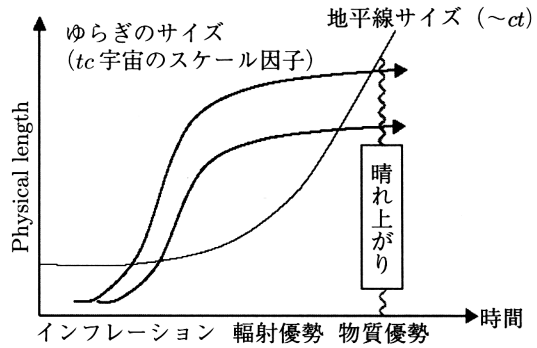


図 4 揺らぎの進化の概念図．揺らぎの物理的な波長は宇宙膨張とともに引き伸ばされていく．一方地平線の大きさはインフレーション中はほぼ一定で，インフレーションが終わると時間に比例して増大していく．

一方，重力波も地平線を超えるスケールでは，振幅を一定に保ったまま，波長が膨張で引き伸ばされる．揺らぎが地平線に入ると，振幅を減少させ

ながら振動を始める．これらの重力波は，背景重力波として宇宙を満たし，インフレーションの痕跡を留めているはずである．現在の観測精度ではこの重力波を直接とらえることは難しい（図 3）．しかし様々な観測計画が進行中であり，このインフレーションの名残を直接観測することが可能になると期待される．

4. ブレーンワールド

標準宇宙論は，4 次元一般相対性理論と，場の量子論に基づいている．しかし数理物理学の発展は，これらの理論がより統一的な理論から導かれる有効理論に過ぎないことを示している．統一理論は，理論の構成上，**高次元時空**を必要とする．さらに近年，物質場が重力場と異なる時空次元に住んでいる可能性が示唆された．これらの考えを基に考え出されたのがブレーンワールドである．ブレーンワールドでは我々の世界を作っている通常の物質場は高次元時空中の 4 次元膜（ブレーン）に住んでいる．通常の物質は膜上にしか存在できないため，その相互作用を見ているだけでは，我々がブレーンの上に住んでいるかどうかを知ることはできない．しかし重力場は高次元時空全体（バルク）を伝播することができる．したがって重力の相互作用を通じてのみ我々は自分たちがブレーンに住んでいることを認識できる．

あらゆる理論は，観測や実験によって確かめられている重力の法則を再現しなければならない．太陽系のスケールでは 4 次元一般相対性理論は非常に高い精度で検証されている．また実験室の実験では，数ミリメートルの間にはたらく重力はニュートンの逆二乗則で精度よく記述されている．一般に，重力が高次元時空を伝播すると重力理論は 4 次元の場合とは異なるものになり観測と矛盾する．したがって高次元時空は存在するとしても非常に小さくコンパクト化されていなければならないと考えられてきた．しかし近年，観測と矛盾しない非常に簡明なブレーンワールドのモデルが Randall と Sundrum によって提唱された[4)]．彼らのモデルでは 4 次元ブレーンが 5 次元時空に存在する．このモデルでは必ずしも 5 次元時空は小さくなくてもいい．その「からくり」は，バルクの時空が平坦でなく，ブレーンから離れていくと時空が指数関数的にしぼんでいく所にある（図 5）．したがって時空はバルクの時空のしぼみ具合を決めるあるスケール l 以上では 4 次元時空のように見える．実際，Garriga と Tanaka によって，l を数ミリ以下にとれば，このモデルは 4 次元理論の重力の法則を再現することが示された[5)]．

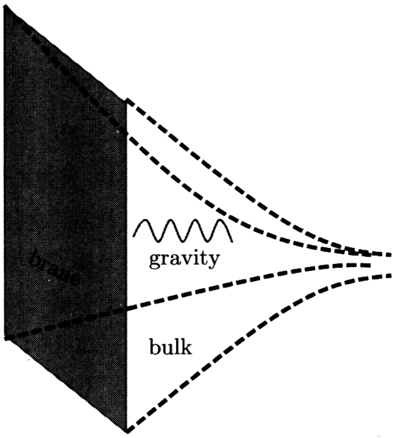


図 5　RS モデルの概念図．我々は 4 次元ブレーン上に住んでいる．

これまで，様々な理論の枠組みの中でブレーンワールドのモデルが提唱されてきた．その中でも，先に述べた Randall と Sundrum によるモデル（**RS モデル**）は特に相対論・宇宙論の研究者に多大な注目を浴びた．モデル自体が非常に簡単なものであるにもかかわらず，ブレーン上の重力場の振る舞いは想像以上に複雑なものであったからである．このモデルは，バルクの重力場によってブレーン上の重力が如何に影響をされるかという基礎過程の理解を深める上で非常によくできたモデルになっている．本稿でも，このモデルに基づいて，ブレーン上の揺らぎがバルクの重力場の存在によってどのように影響されるかを見ていくことにする．この分野の研究は発展途中であり，初期の論文[6)] から現在まで多数の原著論文が存在する．興味のある読者は参考文献[7)]等を参照してほしい．

5. ブレーンワールドにおける宇宙論的摂動

先に述べたように，RS モデルにおいては，l 以上のスケールで，ブレーン上の弱い重力場は，4 次元一般相対性理論でよく記述されることが分かっている．しかし宇宙の膨張を考えると状況は複雑になる．過去に遡れば，宇宙の地平線は l よりも小さくなる．5 次元の線形揺らぎは 4 次元理論と同じように振る舞う **0** モードと，5 次元時空の揺らぎの励起を記述する **Kaluza–Klein** モードに分解される．宇宙の地平線が l よりも小さくなると Kaluza–Klein モードが容易に励起されるようになる．したがって，初期宇宙では重力場は 5 次元的な振る舞いをすることが予想される．さらに膨張宇宙では，宇宙の膨張によってバルクの重力場から新たな効果がもたらされる．高次元時空の立場から見れば，ブレーン宇宙の膨張は高次元時空中をブレーンが運動していることに対応する．このブレーンの運動はバルクの時空の構造に影響を受ける．特にバルクにブラックホールが存在すると，ブレーン宇宙の膨張則はあたかもブレーン上に輻射があるかのように振る舞う．このバルクのブラックホールに起因する輻射項は**暗黒輻射**と呼ばれている．この暗黒輻射の特徴は，宇宙の地平線が l よりも大きな時期においても，4 次元理論からのずれをもたらすことにある．以下では揺らぎの生成，進化において Kaluza–Klein モードの励起，暗黒輻射が揺らぎの性質に与える影響を調べる（図 6）．

5.1 揺らぎの生成

ブレーンワールドにおいて揺らぎを生成する最も簡単な方法はブレーン上に拘束されたインフラトンを考えることである[8]．この場合密度揺らぎはほぼ 4 次元理論と変わらない．重力波は 5 次元時空を伝播するため，バルクの影響を受ける可能性がある．特にインフレーション中の地平線が l よりも小さい場合，Kaluza–Klein モードの励起が顕著に起こる可能性がある．しかし詳しい解析の結果，インフレーション中は時空の対称性のおかげで，Kaluza–Klein モードの励起が抑制されることが分かっている．したがって重力波もほぼ 4 次元理論と同じように振る舞う．しかし揺らぎの振幅はバルクの存在によって変更を受ける．インフレーション中の地平線が l よりも小さい場合，密度ゆらぎの振幅は重力波の振幅より増幅され，重力波の寄与は無視できるようになる．

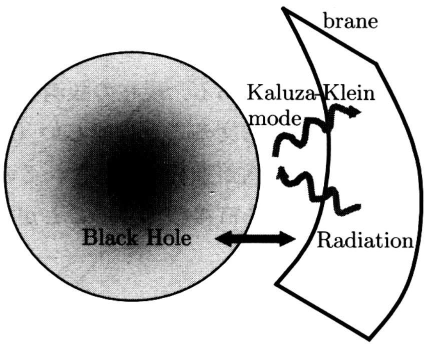


図 6 バルクのブラックホールはブレーン上に輻射（暗黒輻射）を励起する．重力波はバルクに放出されたり，ブレーンに吸収されたりする（Kaluza–Klein モードの励起）．

バルクに存在するインフラトンを考えることもできる[9]．この場合も Kaluza–Klein モードの励起は抑制される．しかし，インフレーション中の地平線が l よりも小さい場合，密度揺らぎと重力波の振幅は同じように増幅され，その比は 4 次元理論と同じように振る舞う．したがってこのモデルでは重力波が観測可能な寄与を与える可能性がある．

5.2 Kaluza–Klein モードの励起

インフレーション中はたとえ地平線が l よりも小さくても Kaluza–Klein モードの励起は抑制される．しかしインフレーションが終わり通常の物質で満たされた宇宙になると，時空の対称性が失われ，Kaluza–Klein モードが励起される可能性がある．簡単のため重力波を考えよう．インフレーション後地平線の外側にある揺らぎに注目する．インフレーション中に生成される揺らぎは 0 モードだけなので，ブレーンワールドにおいても，揺らぎは 4 次元理論と同じように振る舞う．つまり振幅が一定のまま波長が引き伸ばされていく．ブ

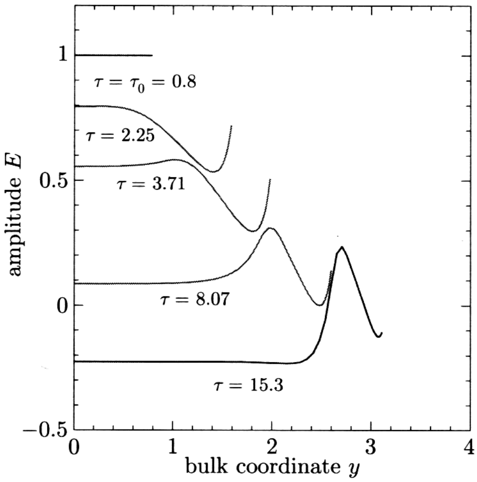


図 7　重力波の 5 次元方向の振る舞い．横軸が 5 次元方向の座標，τ が時間を表す．$\tau=1$ で揺らぎは地平線に入る．

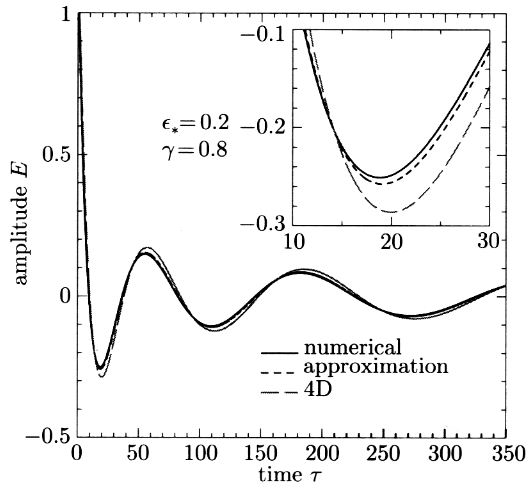


図 8　重力波のブレーン上での時間依存性．実線が数値的に重力波の振る舞いを解いたもの．4D は通常の 4 次元理論の予言．

レーンワールドでは揺らぎは 5 次元方向にも存在し，5 次元方向の揺らぎも一定の振幅を持っている．

時間がたつと，この揺らぎは地平線の中に入り減衰振動を始める．このとき面白い現象が起きる．揺らぎが地平線に入ると，5 次元方向に波が立ち Kaluza–Klein モードが励起される（図 7）．これによって，ブレーン上の揺らぎの振る舞いは 4 次元理論からずれる（図 8）．この効果は基本的にバルクのスケール l と地平線の大きさとの比で決まっている（図はこの比を 0.2 にとっている）．したがって，地平線が小さい初期宇宙に地平線に入る揺らぎでは，Kaluza–Klein モードの励起が顕著に起こり，その振る舞いが 4 次元理論から大きくずれる可能性がある．先に述べたようにインフレーションで生成された重力波は，背景重力波として観測される可能性がある．地平線がちょうど l と同じ大きさのときに，地平線に入る揺らぎが持つ周波数 f_{crit} より高周波では，スペクトルの振る舞いは 4 次元理論から大きくずれる．もし l が 1 mm なら f_{crit} はおよそ 10^{-4} Hz になる．もし，背景重力波が検知されれば，そのスペクトルからバルクの存在を検証することが可能になることが期待される[10]．

5.3　暗黒輻射

宇宙背景輻射の温度揺らぎは，宇宙の地平線が約 10^{23} cm のときに地平線に入る揺らぎによって作られる．実験室の重力法則からの制限より，l は数ミリ以下でなければならないので，宇宙背景輻射の揺らぎに Kaluza–Klein モードの励起が効く可能性は極めて低い．しかし先に述べたようにバルクのブラックホールに起因する暗黒輻射の影響は，地平線が l よりも大きなときにでも無視することはできない．宇宙背景輻射の揺らぎを考える際には，暗黒輻射の「揺らぎ」を考慮しなければならない．暗黒輻射の揺らぎは，インフレーションで生成される密度揺らぎとは異なる種類の揺らぎ（**等曲率揺らぎ**と呼ばれる）を励起する．この揺らぎによって宇宙背景輻射のスペクトルは大きく影響を受けることが知られている．重要な点は，暗黒輻射の「揺らぎ」が単なる輻射の揺らぎではないことにある．暗黒輻射はバルクの重力場に起因するため，暗黒輻射の揺らぎの振る舞いはバルクの重力場の詳細に依存する．実際，暗黒輻射の「揺らぎ」はバルクの重力場で決まる非等方圧力成分を持っており，通常の輻射の揺らぎとは異なった性質を持つ．したがって，宇宙背景輻射のスペクトルは，バルクの重力場の詳細を反映し，その

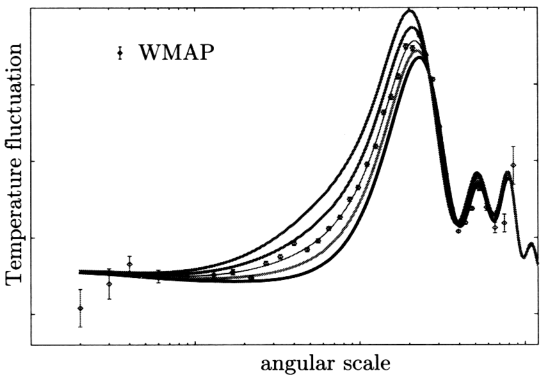


図 9　暗黒輻射の揺らぎが宇宙背景輻射のスペクトルに与える影響．それぞれの曲線は，異なる暗黒輻射の揺らぎの振幅に対応している．宇宙論パラメーターは固定している．

スペクトルから，バルクの重力場の情報を引き出すことができる（図 9）[11]．

6. 展望

本稿では，RS モデルを基にしたブレーンワールドで，宇宙背景輻射および背景重力波がどのように 4 次元理論から変更され得るかを見てきた．この簡単なモデルでさえ，バルクの重力場の影響を定量的に評価することは非常に難しい．ブレーン重力の振る舞いがバルクの存在によってどのように変更されるかを完全に理解するには，さらなる数値的，解析的な取り扱いの進展が必要とされている．また弦理論から直接導かれるモデルを考える必要もある．「究極理論」と宇宙論的観測を結びつける試みは始まったばかりであり，その道程はまだまだ長い．しかし，この試みが夢物語ではなくなりつつあることは確かであろう．

本稿では，標準的な宇宙論が，ブレーンワールドという枠組みの中でどのように変更されるかを見てきた．しかし，ブレーンワールドの考えをより大胆に用いて新しい宇宙論を構築しようという野心的な試みもある．その一つが，ブレーンの衝突を我々のビックバン宇宙の始まりとして解釈しようとするものである．残念ながら，ブレーンの衝突過程を記述する手段が現時点では確立されていないため，インフレーション理論のように決定的な予言をすることはできていない．しかしブレーンワールドの考えが，我々の宇宙観さえも変え得るということは特筆すべきことである．ブレーンワールドにおける宇宙論はまだ始まったばかりである．様々な重要な問題が，未解決のまま残されている．今後，多くの研究者の貢献によって，「究極理論」が宇宙論的観測と結びつけられ，さらには，従来のパラダイムを越える宇宙像を手にできることを期待したい．

参考文献

1) WMAP Science Team, http://map.gsfc.nasa.gov/ 図 1，図 2 はこの Web cite からの抜粋．
2) LISA, http://lisa.jpl.nasa.gov/
LIGO, http://www.ligo.caltech.edu/
DECIGO は日本のスペース重力波干渉計計画．
3) 宇宙背景輻射の詳しい日本語の解説は杉山　直，『膨張宇宙とビッグバンの物理』：岩波講座 物理の世界 地球と宇宙の物理 2001 年などを参照．
4) L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999); *ibid*, **83**, 4690 (1999).
5) J. Garriga and T. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2778, (2000).
6) S. Mukohyama, *Phys. Rev. D* **62**, 084015 (2000); H. Kodama, A. Ishibashi and O. Seto, *Phys. Rev. D* **62**, 064022 (2000); R. Maartens, *Phys. Rev. D* **62**, 084023 (2000); D. Langlois, *Phys. Rev. D* **62**, 126012 (2000); C. van de Bruck, M. Dorca, R.H. Brandenberger and A. Lukas, *Phys. Rev. D* **62**, 123515 (2000); K. Koyama and J. Soda, *Phys. Rev. D* **62**, 123502 (2000).
7) R. Maartens, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148**, 213 (2002).
8) R. Maartens, D. Wands, B.A. Bassett and I.P.C. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301 (2000); D. Langlois, R. Maartens and D. Wands, *Phys. Lett. B* **489**, 259 (2000).
9) S. Kobayashi, K. Koyama and J. Soda, *Phys. Lett. B* **501**, 157 (2001); Y. Himemoto and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **63**, 044015 (2001); K. Koyama and K. Takahashi, *Phys. Rev. D* **67**, 103503 (2003).
10) T. Hiramatsu, K. Koyama and A. Taruya, *Phys. Lett. B* **609**, 113 (2005).
11) K. Koyama, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 221301 (2003).

（こやま・かずや，ポーツマス大学）

ブレーン理論と振動宇宙論

山口 昌英

振動宇宙論，つまり，宇宙には始まりも終わりもなく，永遠に膨張と収縮を繰り返す，という宇宙のシナリオが，近年の超弦理論・M 理論とそれに基づくブレーン理論の発展に触発され，Paul. J. Steinhardt と Neil Turok によって提案された[1]．本稿では，彼らによって提案された振動宇宙論がどのようなものであるかを，インフレーション理論と対比させて，説明していきたいと思う．

振動宇宙論というアイデア自身は新しいものでなく，1930 年頃に，熱心に研究されていたが，当時の理論には 2 つの重大な欠点があった[2]．一つ目は，収縮から膨張に転じる際に，宇宙のエネルギー密度や温度が無限大になってしまい，理論的な予言ができなくなってしまうこと．二つ目はエントロピーに関するものである．エントロピー増大の法則によって，各サイクルごとにエントロピーが貯まっていく．当時考えられていたような，空間が閉じた宇宙では，エントロピーが多ければ多いほど，各サイクルの周期は長くなる．逆に，過去に遡れば遡るほど，エントロピーも少なく，各サイクルの周期は急激に短くなって行く．したがって，有限の時間を遡っただけで，本来ないはずの宇宙の始まりに到達してしまうのである．

このようにして，この理論は，その後ほとんど注目を浴びなくなったが，彼らによって復活の日の目を見ることとなった．まず最初に，新たなシナリオが考え出されるに至った背景について，簡単に説明しよう．M 理論によれば，我々の宇宙の時空の次元は 11 次元である[3]．空間 10 次元のうち，6 次元は，カラビ・ヤウ多様体と呼ばれるものに非常に小さくコンパクト化されており，これからの話では無視することができる．残りの 4 次元は，ブレーンと呼ばれる 2 つの 3 次元空間が，1 次元の線分の両端にのったものになっている．我々が通常観測する粒子は，“visible brane” と呼ばれる一方のブレーン上だけを動くことができる．

このような設定の下，彼らとその共同研究者により，まず，“Ekpyrotic universe”*1) というシナリオが提案された[4]．このシナリオでは，量子的な揺らぎによって作られた，もう一つのブレーンが，ゆっくりと我々のブレーンに近づいてくる．この間，宇宙は収縮する．その後，我々のブレーンと衝突し，運動エネルギーが開放され，高温高密度な状態となって膨張に転じる．

このシナリオでは，現在観測されているような一様等方性・平坦性は，量子的に作られたブレーンが，始めから非常に一様等方で平らなことから説明される．また，後に星や銀河の種となる小さな密度の揺らぎは，宇宙が収縮する間に作られる．これは，宇宙が収縮する割合よりも，ホライズンが収縮する割合のほうが大きくなるためである．一方，インフレーション理論では，宇宙は誕生直後，指数関数的な急激な膨張を経験し，極めて一様等方かつ平らな空間になる．また，この急激な膨張

*1）この名前の由来は，ギリシャ語で大火を意味する “ekpyrosis” という単語から来ている．

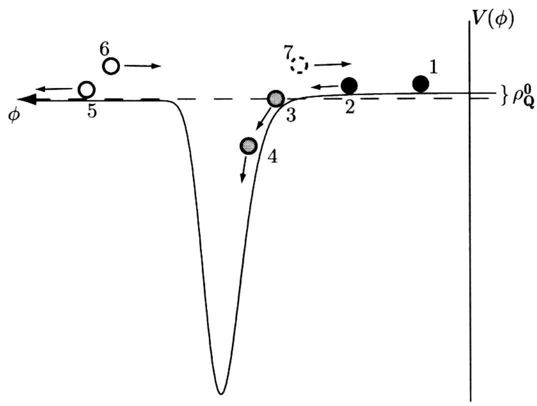


図1 ϕ はブレーン間の距離を表しており，$\phi = -\infty$ がブレーン同士の衝突に対応する．

の間に，小さな密度の揺らぎも作られる．

それでは準備が整ったので，彼らによって提案された新しい振動宇宙論を紹介しよう．基本的には，上に述べたようなブレーン同士の衝突を永遠に繰り返す，というものである．今，4 次元空間に 2 つのブレーンが平行にあり，その間の距離を ϕ で表す．ただし，2 つのブレーンが衝突するときが，$\phi = -\infty$ に対応し，ϕ が大きくなるにつれて，どんどん離れて行く．ϕ は図 1 で表されるようなポテンシャルに従って動くとする[5]．

まず，現在の宇宙は大体，図の中の 1 の状態に対応する．超新星等の観測から示唆されているように，現在の宇宙のエネルギー密度は，非常に小さな真空のエネルギーによって支配されている[6]．その後，宇宙膨張による摩擦が効かなくなると，2 のようにポテンシャルの坂を落ちて行く．このように，真空のエネルギー（ポテンシャルエネルギー）が支配的な時期が長く続くと，インフレーションと同じように，宇宙は一様等方になり，平坦になる．また，粒子やエントロピーは薄められてなくなり，ほぼ真空状態になる．次に，ポテンシャルエネルギーがほぼ零になると（3），運動エネルギーが支配的になり，宇宙の膨張はゆっくりしたものになる．さらに転がり，全エネルギーが負になると，宇宙は膨張から収縮に転じる（4）．この収縮時期に，小さな密度の揺らぎが作られる．宇宙が収縮すると，運動エネルギーは増大する．その結果，坂を急速に駆け上がることができ（5），有限の時間で，ϕ は $-\infty$ に到達し，2 つのブレーンは衝突する．衝突の際に，運動エネルギーが開放され，高温高密度の宇宙ができ，収縮から膨張に転じる．衝突により，2 つのブレーンは離れて行き（6），元の場所に近づく（7）．宇宙膨張によって，運動エネルギーは急速に減少するので，輻射や物質のエネルギーが優勢な時期が続く．やがて，これらも薄められると，真空のエネルギーが優勢な時代がやってきて，元の状態に戻る（1）．

この新しいシナリオでは，各サイクルごとに全エントロピーは増大していくが，エントロピー密度は変わらないので，周期は同じであり，過去に遡っても宇宙の始まりにたどり着くことはない．また，輻射や物質と ϕ が相互作用しており，ブレーンの衝突の際に，宇宙のエネルギー密度が発散しないようになっている．

以上が大筋であるが，実は，このシナリオは，まだお話の域を出ず，具体的なモデルについては，多くの問題点が指摘されている[7]．しかしながら，インフレーションに取って替わるものを考えてみよう，という点で，世間に与えたインパクトは大きく，今後，更なる研究が待ち望まれる．

参考文献

1) P.J. Steinhardt and N. Turok, *Phys. Rev.* **D 65**, 126003 (2002).
2) R.C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, (Oxford U. Press, Clarendon, New York, 1927).
3) P. Hořava and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 460**, 506 (1996); **B 475**, 94 (1996).
4) J. Khoury, B.A. Ovrut, P.J. Steinhardt, N. Turok, *Phys. Rev.* **D 64**, 123522 (2002).
5) P.J. Steinhardt and N. Turok, hep-th/0111030; astro-ph/0204479. これらは，著者自身による一般の人向けの解説であり，より詳しく知りたい方には，読むことを薦める．
6) S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999); A.G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
7) 例えば，A. Linde, hep-th/0107176; hep-th/0205259.

（やまぐち・まさひで，青山学院大学理工学部）

VI. 量子宇宙論からの展開

VI. 量子宇宙論からの展開

宇宙の創生

佐藤　勝彦

1. はじめに

「私たちの住むこの宇宙は，今から 150 億年の昔，熱い火の玉として生まれた．この火の玉が膨張冷却する中でガスがかたまり銀河がつくられ，その中で星がつくられ豊かな構造をもった現在の宇宙がつくられた.」これが私たちが描く科学的な宇宙のモデル，ビッグバン宇宙モデルである[1]．それではこの火の玉宇宙はなぜ，どのようにして生まれたのだろうか？

宇宙全体の構造や進化を扱う学問は宇宙論とよばれる．しかしこの宇宙論が，神話や哲学の段階を脱して科学となったのは，アインシュタインの一般相対論成立以後である．なぜなら一般相対論以前においては，時間や空間は物理学の舞台であっても，決して物理学の対象ではなかったからである．時間空間をあわせて時空というが，一般相対論以前においては，物質がこの時空という舞台の中でどのように運動変化していくかを明らかにするのが物理学であったが，その舞台である時空そのものが物質の存在によって変化し，時間の進み方，空間の幾何学が変わってしまうなどということは考えも及ばなかったことである．相対論の立場から宇宙といえば，3 次元の空間と 1 次元の時間を合わせた 4 次元時空と，そのなかに存在する物質的存在すべてを合わせた系である．したがって，宇宙の創生とは入れ物である時空と物質の 2 つの創生を論じることである．

1980 年代になって，力の統一理論に基づいて，またその刺激によって進められた素粒子論的宇宙論の研究から，宇宙の創生そのものについても物理学で語ることが可能なのだ，ということがわかってきた．その第 1 ステップとなったのが筆者もその提唱者の一人であるインフレーション理論である[2]．インフレーション理論は教科書や多くの解説書では，宇宙の平坦性や一様性を説明するために提唱されたと書かれている．確かにそれらを説明できることは大きな成功であるが，実は宇宙の起源という原理的な立場からいえばこの理論のすばらしい点は「宇宙の物質エネルギーの起源」を説明することができることである．真空のエネル

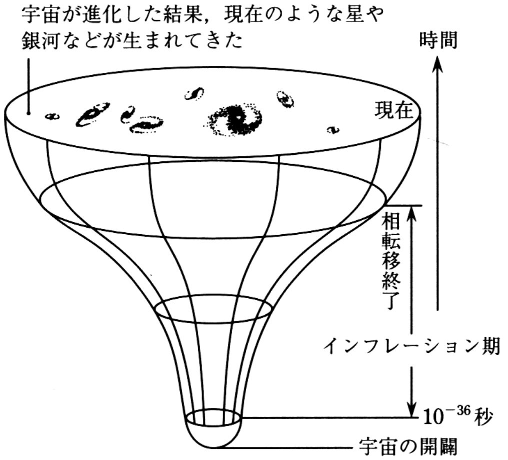


図 1　現代の宇宙創生と進化のパラダイム．

ギーをもった，プランク長さ程度の量子時空さえ存在するなら，それを巨大なまたエネルギーに満ちた我々の宇宙に成長させてやることができるのである．第2ステップは，その量子時空を生成する理論，ビレンケン（A. Vilenkin）による“無からの創生”理論[3]やハートル（J. Hartle）やホーキング（S. Hawking）による無境界仮説[4]の提唱である．時空を量子論的に取り扱うためには量子重力理論が必要である．しかし，完成されたそのような理論はない．彼らは，アインシュタイン方程式のインスタントン解や，ホイーラ・ドイット（Wheeler–DeWitt）方程式を用いて宇宙の創生や始まりの姿を描き出したのである．この解説では宇宙創生論の歴史を振り返りながら，近年の進展についてもふれたい．

2. インフレーション

1970年代，物質世界の基本的な力を一つに統一しようとする統一理論が大きな進歩を遂げた．現在も最終的統一理論は得られていないが，統一理論は宇宙創生時の真空は巨大な“真空”のエネルギーをもつことを示唆している．現在の宇宙では真空のエネルギーは存在しないか，もしくは微小であるが，宇宙の始めには存在していたことになる．“真空のエネルギー”はアインシュタイン方程式のエネルギーの項に代入してやれば空間に対して“斥力”として働き宇宙を急激に膨張させる効果をもつことが直ちにわかる．この“真空のエネルギー”によって宇宙はこれまでの普通のビッグバンモデルとは比べものにならない急激な速さで膨張をすることになる．宇宙は“真空のエネルギー”によって殆ど瞬時に何十桁，何百桁と大きくなる．“真空のエネルギー”の著しい特徴はそのエネルギー密度は宇宙の体積がどれだけ大きくなろうと薄まることはなく常に密度は一定であることである．ということは宇宙の全内部エネルギー，“体積 × 真空のエネルギー密度”も何十桁，何百桁と増えることを意味している．真空のエネルギーの存在する真空はあたかもゴムのように引き延ばされると元の小さな状態に戻ろうとする負の圧力をもつ．真空というゴムを引き延ばしそのエネルギーを増大させたのは宇宙膨張であり，このエネルギーは宇宙の膨張からきている．つまり真空のエネルギーはアインシュタイン方程式を通じて急激な宇宙膨張をおこさせ，それによって自らの全エネルギーをも増大させるという機構によって，単に小さな宇宙の空間的大きさを大きくするというだけでなく，その内部にエネルギーをつくることをしているのである．

真空のエネルギー密度 ρ_ν で満たされた平坦な宇宙の膨張の式は，

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_\nu}{3}$$

である．これを解くと宇宙の大きさを表すスケール項，a の時間変化の式

$$a(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

が得られる．ここで τ は $\tau = c\left(\frac{8\pi G\rho_\nu}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ で定義される真空のエネルギー密度を特徴づける時間である．この指数関数的膨張はいつまでも続くのではない．相転移の終了と共に，何百桁と増大した真空のエネルギーは潜熱として解放され普通の熱エネルギーとなる．宇宙はこの潜熱によって熱い火の玉となって膨張することになる．

インフレーション理論のもうひとつの重要な役割は現在の宇宙の階層構造の種を仕込むことができることである．現在の宇宙には銀河分布の蜂の巣構造，銀河団，銀河，星などの階層構造があるが，これらはインフレーション時の量子論的真空エネルギーのゆらぎとしてその起源を説明することができる．

真空の相転移を担う実体は，元々のインフレーションモデルでは統一理論でのヒッグス場であった．しかし，宇宙の平坦性や，構造の起源を観測と無矛盾に説明するためには，一般のスカラー場として考えなくてはならなくなった．今日，した

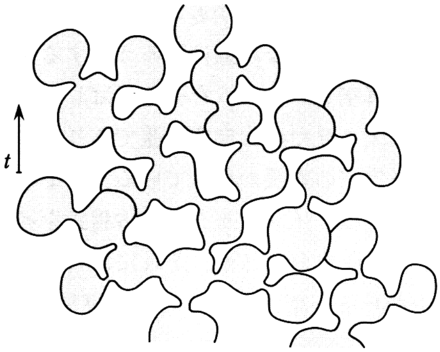


図 2 リンデのカオティックインフレーションと宇宙の創生.

がって真空のエネルギーを担う場はインフラトンとよばれている.

インフレーションモデルの付随的ではあるが興味深い示唆は宇宙がインフレーションの過程でたくさん生まれることである. 宇宙でインフレーションが進むとき, 因果関係もない異なった場所で同じように進むとは考えられない. ある場所では早くある場所では遅くというように非一様に進む. 大きなスケールでは宇宙は凸凹となり膨張が早く急激に起こった領域は元の宇宙から因果関係が切れた“子供”宇宙となる. 子供宇宙の中でもインフレーションが進行するので, そこから更に“孫”宇宙がつくられる. さらにこのプロセスは次から次へと続くので無限の宇宙が生まれることになる[5]. 佐藤, 佐々木, 小玉, 前田 (1982) は, 元々のインフレーション理論の枠内でこのようなことを示したが, これはインフレーション一般に起こることである. リンデ (Linde) はこの我々の宇宙の多重発生の理論と同様に, カオティックインフレーションモデルとよばれるモデルで無限に宇宙が生まれつづけることを示している[6] (図 2). 彼のモデルでは凸凹は量子重力的ゆらぎによって生まれる. エネルギースケールもプランクエネルギー ($G^{-1/2} \sim 10^{19}$ GeV) のスケールである. 彼のモデルは, 時空の極めて大きなスケールでは, 宇宙の創生は無限の過去から無限の未来まで永遠に続いていることになる. しかし, あくまでも彼のモデルは定性的なモデルで定量的な理論ではない.

インフレーションモデルはいうまでもなく, 完全な宇宙創生のシナリオではない. なぜならこのシナリオではどうしても最初の時空とよんだものははじめから存在しなければならないからである. しかしこれによって量子的にミニ宇宙が創生されるならばそれが現実の宇宙へと成長することが可能になったのである.

最近のインフレーション理論の展開についてもふれておこう. 現在インフレーションのモデルは次から次へと改良版が出され, その数は数十を越えるのではないかと考えられる (例えば文献 7〜9) の解説参照). スカラー場を超重力理論, 超対称性理論に求める版, 重力則をアインシュタイン理論から変形することによる版, 時空の次元を高次元にする版などがある. しかしその中でも, 宇宙の創生という意味で興味深いのは, 一泡インフレーションモデルとか, オープンインフレーションモデルとよばれているものである.

宇宙論の業界では, 宇宙の物質密度をこの臨界密度で割ったものを宇宙の密度パラメータとよび, ギリシャ文字 Ω で表す. 宇宙の物質密度がこの臨界密度より大きいと (つまり $\Omega > 1$), 宇宙の曲率は正となる. そして物質に働く重力の効果により宇宙はいつか収縮に転じる. 反対に現在の観測が示唆しているように, 物質が不足していると ($\Omega < 1$), 重力を振り切り永遠に膨張を続けることになる. インフレーション理論は, 宇宙がどのような曲率で始まったとしても, 十分長い時間インフレーションが続けば, 観測的にはほとんど符号がわからないほど, その曲率をゼロに近づける効果をもつ ($\Omega = 1$). したがって, 一般にいわれているようにインフレーション理論は宇宙が平坦であることを予言することになる. 宇宙の曲率がゼロの平坦な宇宙は, 常に膨張は減速しているものの, 決して収縮に転ずることはなく永遠に膨張を続ける宇宙である.

一泡インフレーションモデルは, その名前のように指数関数的に膨張している時空の中で一つの泡が発生し, その泡の内部が我々の宇宙だというモデルである (図 3). このモデルの起源をたどれ

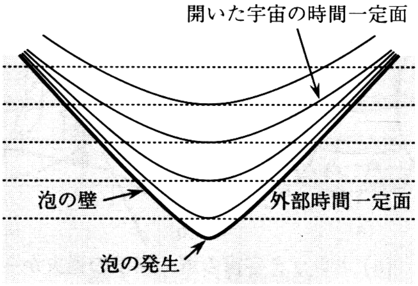


図 3　一泡インフレーションモデル．指数関数的膨張を続ける“偽”真空領域の中に，1 つの泡が発生しその表面は光速で広がる．泡の中では真空のエネルギーが熱エネルギーへと変わっていく．内部は負の曲率をもつ．泡の外の時間，ドシッタ（de Sitter）時間（水平の破線）で見ると泡は常に有限の大きさだが，泡の内部において，泡の表面が通過後の経過時間（図の細い双曲線）で時間をスライスし直してみると宇宙は開いた無限に大きい宇宙となる．

ば，Coleman DeLucia[10)]の真空の泡の内部の一般相対論的研究に遡る．彼らはまず真空のエネルギーによって指数関数的に膨張している時空が存在することを仮定し，その中で 1 次の相転移が起こり泡が発生すると考える．泡の内部の真空のエネルギーが完全にゼロならその時空構造はミンコフスキー的であるが，真空のエネルギーが残るとき曲率負の空間となることを示したのである．さらに Gott[11)]はこの泡がそれぞれ“宇宙”となることによって無限に宇宙が生成されるというモデルを考えている．さらに現在多くの興味を引きつけるようになったのは，佐々木等[12)]，Bucher[13)]，Linde 等[14)]の研究からである．彼らは，その中でインフレーションが続くならば，その中での量子ゆらぎによる密度揺らぎのスペクトル，背景放射のゆらぎにいたるまで系統的に調べられている．このモデルではまずインフレーションを起こし一様になった時空内で泡を発生させるので，時空の広域的一様等方性が保証される．さらに 2 番目に泡の内部で起こるインフレーションで密度揺らぎの起源をも説明する．

インフレーションの持続時間が長ければ，本来のインフレーション理論と同様に，ほとんど宇宙を平坦にしてしまう．

この一泡インフレーションモデルも，無限に宇宙をつくるモデルともいえる．リンデのモデルと同様に，もともとインフレーションを起こしている時空を前提としており，その中にはもちろん無限の数の泡が発生する．それぞれの泡が“宇宙”であるのだから宇宙は無限に生まれる．しかしこれらの宇宙は，決して因果の関係が切れた独立した宇宙ではない．実際泡と泡の発生距離が近いと，2 つの泡は衝突を起こす．つまりそのような宇宙に住んでいるなら，明日突然，衝突してきた別の宇宙の壁が押し寄せ，ビッグバン時の超高温に一瞬に加熱され，我々の存在は消されてしまう可能性もある．

3. 量子宇宙論――“無”からの宇宙創生――

3.1　閉じた宇宙の創生

A. ビレンケンは 1993 年，“Creation of the Universe from Nothing”，つまり「“無”からの宇宙創生」というタイトルの論文を発表し，宇宙が“無”の状態から生まれるのだというモデルを示した．宇宙とは物質が満ちた時空多様体のことである．時空も存在しない“無”の状態から量子重力効果により極めて小さいが，しかし真空のエネルギーが高い状態にある，ミニ時空がトンネル効果によりつくられるモデルを示したのである．彼は真空のエネルギーの存在する閉じた一様宇宙を創生のモデルとして考えた．この宇宙の運動を量子論の立場から調べたのである．宇宙の膨張や収縮はしばしば簡単な 1 個の粒子の山や谷（ポテンシャルエネルギー）での運動と数学的に同じ形式になる．宇宙の膨張収縮を量子論的に記述する方程式，つまり宇宙のシュレーディンガー方程式はホイーラ・ドイット方程式（Wheeler–DeWitt equation）とよばれる．

$$\left[\frac{1}{2}\left(-ih\frac{d}{da}\right)^2 + V(a)\right]\phi(a) = 0.$$

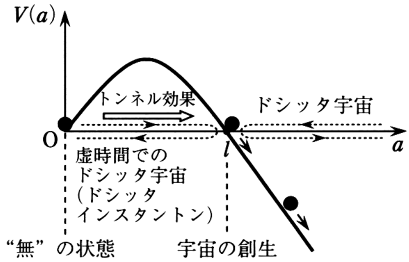


図 4 宇宙の量子論的創生のモデル．真空のエネルギー密度をもった閉じた宇宙，ドシッタ宇宙のポテンシャルエネルギー．実時間では $a > l$ の領域にドシッタ宇宙解がある．$a < l$ では虚時間での解，ドシッタインスタントンがある．これは "無" の状態 ($a = 0$) からトンネル効果で $a = l$ の大きさのドシッタ宇宙がつくられることを意味している．

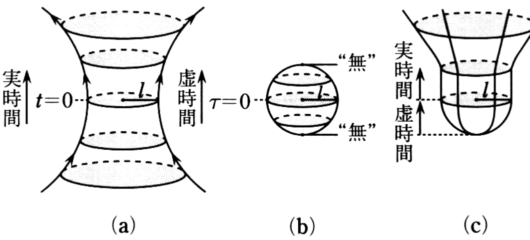


図 5 (a) ドシッタ宇宙の解．無限の過去から収縮してきた宇宙は時刻 $t = 0$ で跳ね返り膨張に転じ無限の未来まで膨張を続ける．(b) ドシッタインスタントンの解．(c) 2 つの解を解析接続してつくり上げられた宇宙創生のモデル．下側は $\tau < 0$ のドシッタインスタントン解，上側は $t > 0$ のドシッタ解．

ここで $V(a)$ はこの閉じた真空のエネルギーに満ちた宇宙のポテンシャルエネルギーである (図 4).

$$V(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi c^2}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right).$$

この宇宙の全エネルギー，つまり膨張の運動エネルギーとこの位置エネルギーの合計はちょうどゼロである．標準ビッグバンモデルでは $R = 0$ の状態は物理学が破綻する特異点であるのに対して，このモデルでの $R = 0$ の状態は何等発散するような物理量は存在しない．この宇宙モデルでは確かに真空のエネルギーが存在するが，その性質からそのエネルギー密度は体積によらず一定であり，体積ゼロであっても何の発散もない．エネルギーは体積ゼロであるからゼロである．この状態は時空の大きさゼロ，エネルギーゼロの状態で，ビレンケンはこの状態を "無" とよんだのである．"無" の状態も量子論的に考えれば量子的ゆらぎは存在し，それはゼロ点振動をしているはずである．トンネル効果によってポテンシャルの山の中をくぐり抜けるならば有限の l という大きさをもった宇宙が創生されることになる．宇宙がトンネルをくぐっている状態は虚数の時間，虚時間を用いると記述できる．アインシュタイン方程式の中の時間 t を虚数の時間，$\tau = it$ に置き換えてしまおう．ここで i は虚数単位である．するとこの虚数の世界では，宇宙のポテンシャルエネルギーは正負が逆となり，ゼロエネルギーの宇宙は $R = 0$ から出発し $R = l$ まで達すると膨張は止まり，今度は収縮に転じ，出発点の $R = 0$ に帰るのである．"無" から始まり最大半径 l まで大きくなるが最終的には再び "無" に帰るのである．この様子を図 5 (b) に示す．しかしこのように "無" に帰ってしまったのでは宇宙は生まれない．虚時間の世界で最大半径となった時点で宇宙は今度は実時間の世界へとつながり，膨張を続けることになるのである．この様子を示したのが図 5 (c) である．これが "無" からの宇宙創生のシナリオである．実時間の世界だけで見れば，大きさ l の宇宙が突然生まれることになる．この生まれた宇宙の大きさの典型的大きさは，プランク長さ，10^{-34} cm 程度であるが，このミニ宇宙は真空のエネルギーが高い状態にあるので，ただちにインフレーションを起こしビッグバン宇宙へと成長するのである．一方，ハートルとホーキングは宇宙の創生から終末まで全ての歴史を量子論的にきちんと取り扱わねばならないと考えた．ビレンケン流のやり方では，確かにトンネル効果として，量子論の効果は取り入れられている．しかしそれはあくまで近似的やり方であって，厳密には物理的状態を表す "宇宙の波動関数" を求めなければならない．量子論では全ての発展は確率的であって，その確率は波の振幅の大きさ等で表される．宇宙の大きさがある値

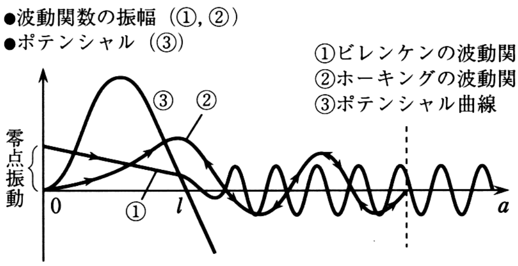


図 6　宇宙の波動関数.

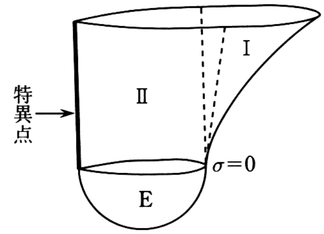


図 7　ホーキングとツロックの開いた宇宙の量子的創生．E の領域で虚数の時間として始まった宇宙は II のドシッタ的宇宙へと解析接続され，さらに泡の壁（図の点線）を経て開いた宇宙領域 I へとつながる．

になったときの確率を知りたければ，宇宙の時間の果てから，波の方程式を解かねばならない．しかしそれを解くためには，その時空の端っこでの境界条件を与えてやらなければならない．彼らは標準ビッグバンモデルのように特異点になっていたのでは，波の方程式を解くことができないのだから，時空の果ては前の図 5 (c) のようにツルッとしていなければならないと考え，それを無境界仮説とよんだ．図 6 に波動関数の概略を示す．ビレンケンのモデルとは細かな違いはあるが，宇宙の波動関数から最も起こりやすい確率の高い道筋を調べてやると，それは創生と同時にインフレーションを起こし巨大な宇宙へと成長する道筋が最も確率が大きいことがわかるのである[3]．

3.2　開いた宇宙の創生

上に示した例は閉じた宇宙の創生であった．ホーキングとツロック（Turok）(1998)[15]は開いた宇宙の量子論的創生を無境界仮説に基づいて展開している．スカラー場 ϕ のポテンシャル $V(\phi)$ がゼロでないとき，ユークリッド的（虚時間での）多様体は 4 次元球面である．その計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\sigma^2 + b^2(\sigma)d\Omega_3^2 \\ &= d\sigma^2 + b^2(\sigma)(d\psi^2 + \sin^2(\psi)d\Omega_2^2) \end{aligned}$$

で記述される（図 7 の領域 E)．3.1 節で議論したような $O(5)$ 対称なインスタントン解は $b(\sigma) = H^{-1}\sin(H\sigma)$, $H^2 = 8\pi GV/3$ であるが，一般的には $b(\sigma)$ はこの関数から変形していてよい．ここで，$\psi = \pi/2 + i\tau$ とローレンチアン領域へ解析接続すると計量は

$$ds^2 = d\sigma^2 + b^2(\sigma)(-d\tau^2 + \cosh^2(\tau)d\Omega_2^2)$$

となる．これは空間的には非一様なドシッタ的計量である（領域 II)．ここで $\sigma = 0$ から泡が発生し光速で広がったとしよう．その内部の計量は $\sigma = it, \tau = i\pi/2 + \chi$ と解析接続することにより，

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(d\chi^2 + \sinh^2(\chi)d\Omega_2^2)$$

となる．前の節で示した一泡インフレーションモデルの泡を一挙につくるモデルとなっている (図 2)．

彼らのモデルでは，しかしユークリッド的領域（領域 E）からドシッタ的領域（領域 II）へと解析接続しようという所から，特異点が生じてくるという問題が生じている（図 7)．領域 E でのインスタントン解は，虚時間アインシュタイン方程式

$$b'' = -8\pi Gb(\phi'^2 + V)$$

とスカラー場の方程式

$$\phi'' + 3b'\phi'/b = \partial V/\partial\phi$$

とを連立して求められるが，$\sigma = 0$ 近傍では $\phi = \phi_0$, $b(\sigma) = \sigma$ として始まった解は，σ のある値 σ_f で ϕ が対数的に発散してしまうのである．しかし，この特異点は内部空間をもつモデルに拡張した場合，高次元の時空で見たとき特異点は消失していることが，Garriga (1999)[16]や Chiba (1999)[17]によって示されている．

4. 現代の創世記，今後の課題

1980 年代にインフレーション理論や無からの創

生論などによって描きだされた標準的宇宙創生のシナリオは,

1. “宇宙”は時間・空間・物質のまったくない“無”の状態から量子重力的効果によって創生された.
2. 創生された宇宙はプランクサイズ 10^{-34} cm 程度の宇宙であるが,それはインフレーションによってただちに何十桁,何百桁と引き延ばされ,マクロな宇宙となった.同時に子供宇宙,孫宇宙と宇宙は大量につくられる.
3. それらの中では銀河が生まれ,星が生まれ,また人類が誕生する.

というものである.また,量子的創生モデルはもちろん,インフレーション理論も必然的に無限の数の宇宙が創生されることを示唆している.このような無限個の宇宙の存在する大きなスケールの概念は,multiverse とよばれている.Universe の uni を multi に置き換えてつくった造語であるが,和訳するとすれば“無量宇宙”とでも訳すべきであろうか.

物理学的宇宙研究の基本は地上の実験や確かな観測によって確かめられた法則を武器として宇宙の現象を解明することである.宇宙創生論もこの立場で進められたものであるが,しかしその基礎なっている量子重力理論はいまだ未完の理論であり実験的検証も現時点では不可能である.実際量子宇宙論はその大筋での成功にもかかわらず,いろんな困難が山積みである.ホイーラ・ドイット方程式には時間が現れてこない.上記の簡単なモデルでは宇宙の大きさを表すスケール項を時間のようにみなしている.しかし宇宙が収縮を始めればこの時間は逆転を始める.波動の位相から時間を抽出する方法も考えられている.しかしそのとり方には不定性がある.量子力学では波動関数の二乗は確率を表し,その確率の総和は確率の保存則を満たし常に 1 である.しかしホイーラ・ドイット方程式ではそれは保存しない.また物理的には正の値であるべき確率が負になる場合も現れる.単純な確率解釈は量子宇宙論では不可能のようである.また実際に採用されているミニ超空間モデルではあまりにもとるべき歴史が制限され過ぎている.時空多様体そのものが,途中で分岐したり,またそれが合体するというようなトポロジーの変化も考えなければならない.原理的問題としては観測の問題,古典化の問題がある.量子力学では物理系の発展は波動方程式で計算されその確率が求められる.そして観測者が観測したとき,波動関数は収縮して 1 つの状態が確定する.しかし宇宙の波動関数の場合観測者である私たちもその系の構成要素である.このように量子宇宙論はむしろ今始まったばかりの学問分野であると考えるべきである.1990 年代以降,超紐理論から創生のシナリオを探ろうとする試みが盛んに進められるようになってきた[18].高次元の宇宙が創生され,何次元かの空間が内部空間としてコンパクト化され 4 次元時空がつくられるモデル[19],高次元空間に浮かぶ板のような多様体が我々の住む時空だとするブレーン理論に基づいたモデル[20],また時間的閉曲線の時空から,我々の宇宙が創生されるというモデル[21]など,多様な創生のモデルがつくられるようになってきた.この二十数年,宇宙創生の研究は大きく進んだものの,多くは 1980 年代初めにつくられたパラダイムの枠内であった.しかし最近の進展はこのパラダイムを越えるものとなるのかも知れない.この多様でいくらか混沌とした状況の中から,21 世紀に花開く理論が生まれてくるのであろう.

参考文献

1) E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley, 1990. A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic, 1990.
2) K. Sato, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **195** (1981) 467.,
A. Guth, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 347.
3) A. Vilenkin, *Phys. Lett.* **133B** (1983) 177.
4) J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 296.
5) K. Sato, M. Sasaki, H. Kodama, K. Maeda, *Phys. Lett.* **108B** (1982).
6) A.D. Linde, *Lett. Nuovo Cimento* **39** (1984) 401.
7) 前田恵一,数理科学特集「素粒子的宇宙論」,1991 年

7 月号，23 頁．
日経サイエンス 1999 年 4 月号，宇宙論特集．
8) 数理科学特集「素粒子論的宇宙論の新展開」，2003 年 2 月号．
9) シリーズ 現代の天文学，第 2 巻，『宇宙論 I—宇宙のはじまり』，佐藤勝彦・二間瀬敏史編，2008 年．
10) S. Coleman and DeLuccia, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 3305.
11) J.R. Gott III, *Nature* **295** (1982) 304.
12) K. Yamamoto, M. Sasaki, T. Tanaka, *Astropys. J.* **455** (1995) 412.
13) M. Bucher et al, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 5538.
14) A.D. Linde and A. Mezhlumian, *Phys. rev. D* **52** (1995) 5538.
15) S.W. Hawking and Neil Turok, *Phys. Lett. B* **425** (1998) 25–32.
16) J. Garriga, hep-th/9804106, hep-th/9803210.
17) T. Chiba, *Physics Letters, B* **442** (1998) 59–62.
18) G. Venetiano, *Phys. Lett. B* **265** (1991).
M. Gasperini, G. Veneziano, *Astropart. Phys.* **1** (1993) 317.
19) P. Chmielowski, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 1835.
Y. Ezawa et.al., *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 1873.
H. Ochiai, K. Sato, Proceedings of the 4th RESCEU Symposium “The birth and evolution of the Universe” ed K. Sato and M. Kawasaki, Universal Academy Press, 2000.
20) Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 086004.
L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370.
21) J. Richard Gott III and Li-Xin Li, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 023501.

（さとう・かつひこ，東京大学数物連携宇宙研究機構，
明星大学理工学部）

量子宇宙論の盛衰

小玉 英雄

量子宇宙論は，時空構造の量子性を考慮して，宇宙の創生，進化，構造を研究する分野である．この分野は，B.S. DeWitt, J.A. Wheeler, C.S. Misnerによる重力の正準量子化に関する研究を契機として，1960年代後半に誕生した．その後，長い間大きな進展はなかったが，1980年代前半に「宇宙の無からの創生」というアイデアがA. Vilenkin, S.W. Hawkingらにより提唱され，一躍脚光を浴びることになった．この小文では，このアイデアの背景とその後の展開を中心として，量子宇宙論の歴史と現状を解説する．文献については，最近のもののみを掲載する．1995年以前のものについては，例えばD.L. Wiltshireのレビュー[1)]を参照してほしい．

1. なぜ量子宇宙論か？

宇宙項がゼロで宇宙が通常の物質で満たされているとすると，一様等方な膨張宇宙を記述するEinstein方程式の解は，過去の有限な時刻で宇宙の体積がゼロとなる特異性をもつ．このことは，A. Friedmannらによる研究で一般相対論の誕生直後から知られていたが，その後，空間的に一様なら等方性の仮定がなくても同様の結果が一般に成り立つことが示された．これは，宇宙には始まりがあり，現在の宇宙は有限な年齢をもつことを意味するが，同時に，その始まりが非常に特異なものであることを示している．この宇宙の始まりの特異性は**宇宙の初期特異点**と呼ばれる．

量子論によると，時間とエネルギーには $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$ という不確定性関係が成り立つ．この関係を単純に宇宙初期に適用すると，宇宙が生まれて時間 t 経った時点で，サイズ L の空間領域に含まれるエネルギーは $\Delta E \sim \hbar/t$ の不定性ないし量子ゆらぎをもつ．一方，物質のエネルギー密度を ρ，圧力を p として $w = p/\rho$ が非負で一定とすると，ρ は $c^2/(Gt^2)$ に比例するので，この領域に含まれるエネルギーは $E \sim c^2L^3/(Gt^2)$ となる．これより，エネルギーの相対的な量子ゆらぎは

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{ctL_{\rm pl}^2}{L^3}$$

で与えられる．ここで，$L_{\rm pl} = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33}$cm は基本定数から作られる長さの次元をもつ量で，**Planck長**と呼ばれる．したがって，宇宙膨張に従って L が宇宙のスケール因子 a に比例して時間変化するとすると，$w < 1$ すなわち物質の音速が光速より小さいとき $L \propto a \propto t^\gamma$ $(\gamma > 1/3)$ となるので，t がゼロに近づくと $\Delta E/E$ は限りなく大きくなる．すなわち，どのように大きな領域を取っても，初期特異点に十分近づくと，エネルギーの量子ゆらぎが平均値を大きく上回る．Einstein方程式

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (\kappa^2 = 8\pi G/c^4)$$

より，エネルギーのゆらぎは時空計量のゆらぎを

生み出すので，これは初期特異点の近傍では時空計量の量子ゆらぎが大きくなり，時空を古典的に記述することができないことを意味している．

このように，宇宙の始まりを議論するには，時空構造自体の量子性を考慮することが必要となる．それでは，宇宙の初期特異性は，時空構造の量子性を考慮すると解消されるであろうか？ これが，量子宇宙論の出発点となった問題意識である．特に，初期特異性は一様モデルの特殊性ではなく，物質が強エネルギー条件と呼ばれる自然な条件を満たす限り，膨張宇宙の一般的な性質であること（**膨張宇宙の特異点定理**）が1960年代後半にS.W. Hawkingにより示されて以降，この問題は多くの物理学者の心を強くとらえるようになった．

量子宇宙論の課題は，この特異点解消という原理的な問題だけではない．宇宙論は，現在の宇宙の物質構成，多様な天体の起源や分布，さらには宇宙の大域的な構造を宇宙の進化により説明しようとする学問であるが，物理学の基本法則が発展方程式の構造をもっているために，当然，宇宙の特性は一般に初期条件に依存することになる．1970年代に確立された**宇宙の標準モデル**では，この問題は深刻であった．その理由は，$a \propto t^\gamma$ $(0<\gamma<1)$ という形の膨張則に従う宇宙モデルを基礎としていたことにある．このモデルでは，宇宙が誕生して以降に時刻 t までに情報交換が起こる領域のサイズ，すなわち宇宙のホライズンサイズの増大速度が宇宙の膨張速度より速くなり，現在の宇宙の空間的相関はすべて宇宙初期では因果的相関距離を超える相関となる．このため，それらの多くは，古典的な宇宙の誕生時，すなわち時空特異点での初期条件に帰着されてしまう．特に，宇宙の大域的な一様等方性やそれからのずれとしての天体の大域的な分布は，この古い標準モデルでは説明不可能となる．これらの特性を説明するには，通常の発展方程式的な法則以外に初期条件そのものを決定ないし制限する法則が必要となる．宇宙の誕生時での振舞いが量子宇宙論により記述されるとすると，この宇宙の初期条件を決定することも量子宇宙論の基本課題となる．

この状況は，宇宙初期における**インフレーション**というアイデアの登場により一変した（インフレーションモデルの詳細については，本別冊の横山氏の解説を参照）．このモデルでは，現在の宇宙の観測領域は，過去にさかのぼると，宇宙の初期特異点に達する以前にPlanck長以下のサイズとなり，空間の局所的構造がよく分かっているとする限り，現在の宇宙の特性は基本法則のみで決まってしまうことになる．ただし，インフレーションが起きるかどうかは依然として宇宙の初期条件に依存する．特に，インフレーションモデルの予言が現在の観測と整合的であるためには，宇宙の時空構造が古典的に記述できる時期の始まりとともにインフレーションが起きることが要求される．したがって，量子宇宙論が宇宙の初期条件を制限するとすると，それは宇宙の誕生とともにインフレーションが起きることを予言するものでなければならない．

2. 宇宙の波動関数

量子宇宙論の研究には，**量子重力理論**すなわち重力場あるいは時空構造の量子論が必要となる．量子重力理論を構築する試みは長い歴史をもち，その始まりは場の量子論が作られた20世紀前半にさかのぼる．最初に考えられた方法は，時空のゆらぎが小さいとして，時空計量の古典解からのずれを量子電気力学と同様の標準的な場の理論の手続きに従って量子化し，量子補正を相互作用定数（今の場合 $\sqrt{G}$）のベキ級数として求める摂動論的アプローチであった．しかし，この方法では相互作用に対する量子補正の紫外発散が**繰り込み不可能**で制御できないことが直ちに明らかとなった．この困難は，現在大きく発展している超弦理論が作られる動機の一つとなったものである．量子宇宙論への応用という視点から見ると，このアプローチには別の困難があった．それは，宇宙初期のように時空構造の量子ゆらぎが非常に大きい状況には適用できないことである（現在の超弦理

論も，この問題を扱うことはできない）．このような状況を取り扱うには，**重力の非摂動論的量子論**，すなわち基準となる特別な古典時空を必要としない量子論の枠組みが必要となる．

このような背景の下で，1960 年代後半に Wheeler や Misner は重力理論を場の理論ではなく，力学系の理論として扱うことを提案した．彼らは，まず，4 次元時空の時間一定面を考えることにより，時空を空間的な 3 次元面の時系列 Σ_t に分解した．各 Σ_t 上には時空計量より 3 次元の Riemann 計量 $q_{ij}(t,x)$ が誘導される．これら 3 次元面が互いに同相として $\Sigma=\Sigma_0$ とおくと，この $\mathbf{(3+1)}$**–分解**により Σ 上に計量の時系列 $\boldsymbol{q}(t)=(q_{ij}(t,x))$ が定まり，Einstein 方程式は $\boldsymbol{q}(t)$ の 2 階微分発展方程式を与える．すなわち，重力理論が粒子の力学系と同じように記述される．そこで，力学系の正準理論を適用して，$\boldsymbol{q}$ の正準共役量 $\boldsymbol{p}=(p^{ij}(t,x))$ を導入すると，Einstein 方程式は 1 階の正準系に帰着される：

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\{\boldsymbol{q},H\},\quad \dot{\boldsymbol{p}}=\{\boldsymbol{p},H\}. \tag{1}$$

この正準理論に正準量子化の手続きを適用すれば，重力の正準量子論が得られる．$\boldsymbol{q}$ が粒子の位置に対応するので，Σ 上の 3 次元 Riemann 計量の全体が作る空間を $\mathcal{S}$ とおくと，量子状態は $\mathcal{S}$ 上の波動関数 $\Psi(\boldsymbol{q},t)$ で記述されることになる．$\mathcal{S}$ は**スーパースペース**と呼ばれる．また，運動方程式は Ψ に対する Schrödinger 方程式に置き換えられる：

$$i\partial_t\Psi=H\Psi. \tag{2}$$

このように，重力の量子論が粒子系の量子論と同じ形式で書かれることになるが，実は，重力系の正準理論には通常の粒子系にない新たな要素が付け加わる．それは，上の (3+1)–分解で得られる空間計量の時系列 $q_{ij}(t,x)=g_{ij}(t,x)$ だけでは元の 4 次元時空の計量 $g_{\mu\nu}(t,x)$ が完全に決まらないことによる．g_{00} および g_{0i} という 4 個の成分が不定である．これらの量は実は，時間座標や空間座標の取り方の自由度を表す量となっている．したがって，それらの量が不定であること自体は問題でない．しかし，Einstein 方程式は $g_{\mu\nu}$ の各成分を独立な変数として Einstein–Hilbert 作用積分

$$S=\frac{1}{2\kappa^2}\int_M d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \tag{3}$$

を変分することにより得られるので，g_{00} および g_{0i} の変分から得られる方程式は，g_{ij} の変分から得られる $\boldsymbol{q}$ の発展方程式と独立な方程式となる（ここでは簡単のため真空の場合を考える）．この付加的な方程式は，$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$ のみで表され，それらの取りうる値に対する制限（拘束条件）となることが示される：

$$\mathcal{H}_\perp(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=0,\quad \mathcal{H}_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=0. \tag{4}$$

（これらは，空間の各点で成り立つので，無限個の条件である）．このような**拘束条件を伴った正準系**の取扱いは 1950 年代に Dirac により詳しく研究されていた．そこで，DeWitt は，Dirac の処方に従って，これらの条件を量子状態に対する制限

$$\mathcal{H}_\perp\Psi=0,\quad \mathcal{H}_i\Psi=0 \tag{5}$$

に置き換えた．この方程式は現在，**Wheeler–DeWitt 方程式**と呼ばれている．

同様の処方は，例えば自由電磁場にも適用でき，その場合は，拘束条件は電場に対する Gauss 方程式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ となる．これを波動関数に対する拘束条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}\Psi=0$ に置き換えれば，Schrödinger 方程式と合わせて自由電磁場の量子論ができ上がる．しかし，重力場の場合は，ここで特殊な事態が起きる．それは，Schrödinger 方程式に現れるハミルトニアン H が拘束条件の線形結合となってしまうことである：

$$H=\int_\Sigma d^3x(N\mathcal{H}_\perp+N^i\mathcal{H}_i). \tag{6}$$

ここで，N と N^i は g_{00},g_{0i} と $g_{00}=-N^2+q_{ij}N^iN^j$, $g_{0i}=q_{ij}N^j$ の関係にあり，それぞれ時間座標，空間座標の取り方を記述する非力学変数である．この関係を用いると，上記の拘束条件の下で Schrödinger 方程式は $\partial_t\Psi=0$ となる．したがって，正準量子論では，時間に依存しないスー

パースペース $\mathcal{S}$ 上の波動関数 Ψ が重力場の"状態"を記述し，取りうる状態は Wheeler–DeWitt 方程式により決定されることになる．このように，時間変数が定式化から失われるのは，一般共変性のために一般相対論では時間座標が物理的な意味をもたないことに起因する．この**時間の問題**および**波動関数の解釈の問題**は，宇宙全体に量子論を適用できるかという原理的問題とも関連する量子宇宙論の基本問題の一つであるが，この小文では紙数の都合で立ち入らないことにする．これに関しては，早田次郎氏が本誌の過去の特集に解説を書いておられるのでそれを参考にしていただきたい[2)]．

この定式化を宇宙全体に適用すると，スーパースペースは宇宙の空間的断面の取りうる構造の集合となり，対応する Wheeler–DeWitt 方程式の解 Ψ がその確率分布を記述する，言い換えれば宇宙の波動関数を与えると解釈される．ただし，Wheeler–DeWitt 方程式は（形式的に）偏微分方程式の構造をもつので，宇宙の波動関数を決定するには，スーパースペース上での境界条件を与えないといけない．この境界条件は，古典論における初期条件の役割を果たすことになる．それではどのような境界条件が自然であろうか？ 宇宙の初期特異点の回避という視点から，この問題に対する解答として，DeWitt は空間計量が退化するスーパースペースの境界で波動関数の値がゼロとなるという境界条件を提案した．しかし，まもなく，この境界条件を課すと一般に波動関数は至る所ゼロとなってしまうことが明らかとなった．

3. 宇宙の無からの創生

この DeWitt の研究の後，Misner らにより，スーパースペースが有限次元となるように空間的に一様な宇宙に制限した**ミニスーパースペースモデル**に関する研究が**ハミルトニアン宇宙論**という名の下に進められたが，長い間目立った進展はなかった．この長い停滞をうち破ったのが，Vilenkin で

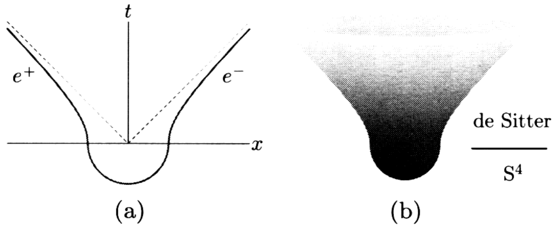


図 1　無からの宇宙創生.

ある．正の宇宙項をもち空間の曲率が正で閉じている等方一様宇宙モデルに対する宇宙膨張の方程式は，a を宇宙のスケール因子（今の場合，空間が 3 次元球面なのでその半径に対応）として

$$\dot{a}^2 + 1 = (\Lambda/3)a^2 \tag{7}$$

で与えられる．この解は，$a = H^{-1}\cosh(Ht)$ $(H = (\Lambda/3)^{1/2})$ で与えられ，de Sitter 時空を表す．Vilenkin は，a を位置，t を固有時，H を eE/m と読み替えれば，この方程式が一様な電場 E の中を運動する質量 m，電荷 e の電子の運動と同じであることに着目した．量子論では，一様な電場中では，電子と陽電子が対生成する．時間を虚時間に変える変換 $it \to \tau$ により得られる運動方程式の解に対する作用積分を S_E とすると，対生成の確率 P は，e^{-S_E} に比例する．この虚時間の運動は (τ, x) における円となるので，実時間の運動の軌道を合わせると図 1 (a) のようになる．この状況を宇宙モデルに翻訳すると，虚時間での解は 4 次元 Euclide 球面となるので，実時間での de Sitter 解とつなぐと図 1 (b) のようになる．この図は，何もない所から de Sitter 宇宙が突然創生されることを表している．そこで，このアナロジーに基づいて，1982 年に Vilenkin は量子論では有限な大きさの宇宙が「無から創生される」というアイデアを提案し，その確率は $P \sim \exp(3\pi/(\Lambda L_{\rm pl}^2))$ で与えられるとした．実に大胆なアイデアである．

この提案の 1 年後，J. Hartle と Hawking は少し異なった視点から，Vilenkin のアイデアに一般的な定式化を与えた．彼らはまず，Feynman の経路積分を重力理論に適用すると Wheeler–DeWitt の解が得られることに着目した．すなわち，Σ_0,

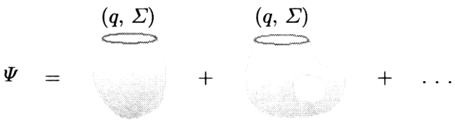


図 2　Hartle–Hawking 波動関数.

Σ を時空の空間的断面，$\boldsymbol{q}_0$，$\boldsymbol{q}$ をその計量，S を Einstein–Hilbert 作用積分として

$$G(\boldsymbol{q},\Sigma;\boldsymbol{q}_0,\Sigma_0)=\int[Dg]e^{iS} \tag{8}$$

とおくと，$G(\boldsymbol{q},\Sigma;\boldsymbol{q}_0,\Sigma_0)$ は $\boldsymbol{q}_0$ から $\boldsymbol{q}$ への遷移振幅（正確には Green 関数）を表し，$\Sigma\neq\Sigma_0$ のとき $\boldsymbol{q}$ に関して Wheeler–DeWitt 方程式を（形式的に）満たす．ただし，経路である 4 次元時空 $(M,g_{\mu\nu})$ としては，M の境界が $\Sigma_0\cup\Sigma$ となり，g_{ij} が Σ_0 では $(q_{ij})_0$，Σ 上では q_{ij} に一致するものを取る．ここで，経路として Σ_0 が空集合となるもの，すなわち Σ のみを境界とする 4 次元時空を取れば，Vilenkin の提案する宇宙の無からの創生を表す宇宙の波動関数を与えるというアイデアである．ただ，このままでは問題がある．それは，Lorentz 計量をもつ時空は空間のトポロジー変化を許さないことが R. Geroch により示されていたことである．そこで，Hartle と Hawking は，通常の場の量子論の処方に従って，時空の代わりに時間を虚時間に変えて得られる 4 次元 Riemann 空間を経路とするアイデアを導入し，宇宙の波動関数は観測情報を担う 3 次元多様体 Σ のみを境界とする 4 次元 Riemann 空間を経路とする Euclide 型経路積分

$$\Psi(\boldsymbol{q},\Sigma)=\sum\int[Dg]e^{-S_E} \tag{9}$$

で与えられるというアイデアを提案した（図 2）．この提案は，**no boundary proposal** と呼ばれている．ここで，和の記号は経路となる 4 次元 Riemann 空間のトポロジーについての和を表す．

4. Vilenkin 対 Hawking

Hawking は翌年，彼らの枠組みで一様なスカラ場を含む閉じた一様等方宇宙モデルを調べ，彼らの波動関数は誕生直後にインフレーションを起こす宇宙の集合を記述することを示した．さらに，1985 年には J.J. Halliwell と共同で一様等方モデルからのゆらぎを研究し，インフレーションモデルで提案されたのと同じゆらぎのスペクトルと振幅が波動関数から得られることをある近似の下で示した．これは，Hartle–Hawking の提案が，初期特異点の回避とインフレーション宇宙の生成という，冒頭で述べた課題を満たす量子宇宙論の枠組みを与える可能性があることを示唆していた．

これに対して，Vilenkin は 1983 年に彼のアイデアを一様スカラ場を含む宇宙モデルに拡張し，同様の結論を得た．彼はまず，物質相転移の理論とのアナロジーから，生成された直後での宇宙ではスカラ場は作用積分の鞍点にあるとした．これは，スカラ場のポテンシャル $V(\phi)$ の極大点に対応する．このとき，極大点は不安定ながら定常解なので，スカラ場が一定値 ϕ を取るとして，宇宙の創生確率を求めた．この計算は，$\Lambda=8\pi GV(\phi)$ とすれば宇宙項をもつ閉じた一様等方宇宙の生成と同じで，

$$P\sim\exp\left[\frac{3M_{\rm pl}^4}{8V(\phi)}\right] \tag{10}$$

を与える．これは，波動関数の絶対値の 2 乗を確率と解釈すると，Hawking の波動関数から得られるものと一致する．生成された後，スカラ場は量子ゆらぎにより極大点からずれ，極小点に転がる間にインフレーションを起こす．

ただし，この議論には問題がある．(10) に従うと，小さな V を与える ϕ の実現される確率が高いことになる．したがって，この確率から見る限り，むしろ宇宙創生時にスカラ場はポテンシャルの極小点にいるとするほうが自然に見える．そのときには，インフレーションは起きない．Vilenkin の議論では，極大点が実現されていると仮定することでこの問題を回避しているが，Hawking の議論ではそのような制限はない．

この矛盾を解消するために，1984 年に Vilenkin

は**宇宙のトンネル遷移型波動関数**という新しいアイデアを提唱した．これは次のようなものである．まず，正の宇宙項をもつ閉じた一様等方宇宙モデルの膨張則は，スケール因子 a に共役な運動量を $p = a\dot{a}$ とすると，

$$p^2 + U(a) = 0;\ U(a) = a^2 - H^2a^4 \quad (11)$$

と書き換えられる．これは，ポテンシャル $U(a)$ 内での全エネルギーゼロの粒子の運動と対応し，古典解は，$a \equiv 0$ と de Sitter 解となる．2つの解は，ポテンシャルバリアで遮られている．この2つの解のうち最初のものを "無" と解釈すると，無からの創生は，粒子が $a = 0$ からポテンシャルバリアを量子力学的トンネル遷移で通り抜け，古典的に運動可能な別の領域 $a > 1/H$ に現れる現象と見なされる．この観点から，Vilenkin は，バリアを通り抜けた後宇宙は膨張するので，a が十分大きい領域での波動関数は正の運動量に対応する振動解 $\exp(i\int da\sqrt{|U|})$ で与えられると仮定し，これを境界条件とする Wheeler–DeWitt 方程式の解を求めた（図3）．その結果，宇宙の創生確率（今の場合 $a = 1/H$ での波動関数の絶対値の2乗）として

$$P \sim \exp\left(-2\int_0^{1/H} |p(a)|da\right) = \exp\left[\frac{-3M_{\rm pl}^4}{8V(\phi)}\right] \quad (12)$$

を得た（$M_{\rm pl} = (\hbar/c)L_{\rm pl}^{-1}$）．これは Hawking の得た値の逆数に比例しており，V が大きいほど大きな確率を与える．それまでと全く逆の結果を与える提案をしたことについて，Vilenkin は，Hawking の還暦を祝うために2002年1月に開かれた国際会議で次のように述べている．「(最初に提案した確率の議論が）人生最大の間違いであったとは言いたくないが，私は確かに心変わりをした．今は，(12) が正しい答えだと信じている」[3)]．

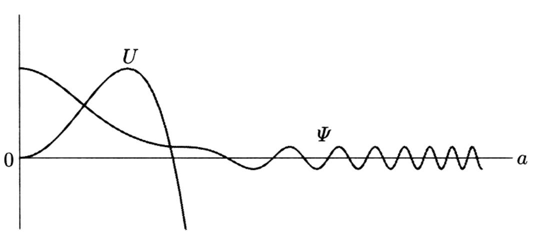


図3　トンネル遷移型波動関数．

Vilenkin は，この新たな提案をすると同時に，Hawking の無境界型波動関数は（上で述べた理由から）確率的にインフレーションを予言しないと批判した．これに対して，Hawking は "You do not have a wave function." と反論した．すなわち，Vilenkin の議論は単純なミニスーパースペースに基づく特殊な議論で，no boundary proposal のような一般的定式化がなされていないという訳である．これが，Vilenkin と Hawking との長い論争の始まりである．A. Linde や V. Rubakov が Vilenkin に賛同したので，この論争はあたかもロシア学派とケンブリッジ学派の論争の様相を呈した．ただし，その後の展開はいずれのグループにとってもあまり芳しくない．

Vilenkin は Hawking の反論を受けて，1986年にトンネル遷移型波動関数というアイデアを一般のスーパースペース上での波動関数に対する境界条件として定式化することを試みた．基本的な考え方は，スーパースペースの境界で波動関数が外向きの進行波となることを境界条件としようというものである．ただし，Vilenkin 自身も認めているように，この定式化は Hartle–Hawking のものと比べても数学的な明確さを欠くものであった．その後，Vilenkin は1994年に，Lorentz 型経路積分表示，すなわち (8) において初期条件を設定する3次元多様体 Σ_0 を一点につぶした極限を，トンネル遷移型波動関数に対する一般的表式とするという別の提案をしている．すなわち，無境界経路積分仮説の Lorentz 型版である．ただし，この場合経路積分は波動関数ではなく Green 関数（伝播関数）を与え，しかも Σ が一点につぶれる極限で一般に特異となる．これは，特異点回避という視点からは望ましくない振舞いである．また，Rubakov（1984, 2002）らは宇宙がトンネル遷移をする際に無限の量子論的粒子生成が起きるという主張をしている[4)]．彼らの議論の正当性には疑

問があるが，正しければ Vilenkin サイドに不利な要素となる．

一方，Hawking の側では，彼の学生を中心として無境界経路積分仮説の厳密化が試みられた．Hawking らの基礎としている Euclide 型経路積分は，すでに述べたように通常の場の理論の手法を援用したものである．この方法の利点は，通常の場の理論では，S_E が正定値となるため経路積分 $\int[D\phi]\exp(-S_E)$ の収束性が Lorentz 型，すなわち実時間を用いた振動型に比べて良くなることである．ところが，重力理論にこの方法を適用すると，宇宙のスケール因子（一般には時空の体積要素 $\sqrt{g}$）に対応する成分の S_E への寄与が負となり，S_E は下に有界でなくなる．これは，Euclide 型経路積分がそのままでは発散していることを意味している．Hawking は鞍点からの寄与が波動関数の主要部を決定するという仮定の下で議論を進め，この困難に目をつぶってきた（正確には，Hawking もこの問題について Wick 回転を用いた方法を提案しているが，その場しのぎの観がぬぐえない）．これに対して，Halliwell は 1989 年に J. Louko と共同で計量が複素数となる複素経路を考えることにより経路積分を有限にできないかという視点から，ミニスーパースペースモデルの経路積分を研究した．その結果，彼らは，有限な経路積分を与える複素経路は存在するが，それは一意的でなく，異なる経路は異なる波動関数を与えることを見出した．しかも，その中には Vilenkin の波動関数に対応するものも含まれていた．すなわち，無境界経路積分仮説は，その見かけと異なり宇宙の波動関数を一意的に決める境界条件とはなっていなかったのである．

この発見により，宇宙の波動関数の議論は急速に輝きを失った．この同じ頃，宇宙の波動関数に対する無境界仮説に基づいて，ワームホールにより互いに相互作用する**多重宇宙モデル**（Baby universe model）が S. Coleman らにより研究され，相互作用の効果で宇宙項がゼロとなる多重宇宙状態が確率的に選ばれるという興味深い議論が展開された．紙数の都合で詳細は省くが，結果的には，やはり基礎となる経路積分の定義が曖昧であるため，明確な確率的議論ができないということで，このアイデアは立ち消えとなった[5]．

その後も，この問題を解消するような有力なアイデアは提案されていない．経路積分に基づくアプローチで唯一興味深い最近の研究は，J. Ambjorn, R. Loll らによる動的単体分割法に基づいた，Einstein 重力の **Lorentz 型経路積分**の研究である[6]．また，非摂動的正準量子化のもう一つのアプローチである**ループ量子重力理論**を一様等方宇宙モデルに適用すると，波動関数に対する DeWitt の境界条件に相当するものが矛盾なく定式化できるという主張が M. Bojowald になされている[7]．これらについても，紙数の都合で詳しい説明は省略する．

5. 宇宙の初期条件は必要か？

冒頭で述べたように，宇宙の初期条件を与えるという大きな目標を掲げて登場した量子宇宙論は，インフレーション宇宙モデルの登場によりその課題をかなり限定的なものに修正せざるを得なかった．宇宙の波動関数に関する議論の混迷はインフレーションモデルの新たな発展と相まってこの傾向にさらに拍車をかけ，量子宇宙論は次第にインフレーションモデルにその主役の座を奪われてゆく．皮肉なことに，その原動力となったのは，量子宇宙論を積極的に推進してきた人々であった．

1983 年に Vilenkin が一様スカラ場を含む宇宙モデルを用いてインフレーション宇宙の無からの創生を議論したことはすでに述べたが，この論文で彼は，インフレーションの進行の様子について興味深い議論を展開した．その概要は次のようなものである．スカラ場が，宇宙創生時にポテンシャルの極大点にあるとすると，極小点への移行は量子ゆらぎにより引き起こされないといけない．量子ゆらぎはスカラ場のランダムウォークを引き起こすので，この移行は単調でない．ところが，ポテンシャルの高い所にいるほど宇宙の膨張は速く体

積の増大度は大きい．このため，空間の体積で確率を計ることにすると，スカラ場がポテンシャルの極大点近傍に留まる確率は時間が経っても減少しない．その結果，宇宙の大部分ではインフレーションは永遠に終わらない．ただし，一部の領域では量子ゆらぎがうまく累積し古典的な単調運動へと代わり，インフレーションが終了する．このようなインフレーションの終了したフリードマン的宇宙がランダムかつ定常的に生み出され続ける．Linde はこのアイデアを積極的に取り上げて**永続的インフレーション**（Eternal inflation）と名付け，インフレーションは一般に永続的なものであるという主張を展開した．すなわち，宇宙のほんの一部の領域でインフレーションが起きれば，それは次第に宇宙の大部分を占める永続的インフレーションへと移行するという訳である．

この Linde の主張に従えば，宇宙の波動関数が Hartle–Hawking 型であろうと Vilenkin 型であろうと観測的に違いはない．ほんの小さな確率でもインフレーションの起きる領域が存在することを予言するものならよいということになる．Linde はさらに，この考え方を進めて，未来だけでなく過去に向かっても永続的なインフレーションモデルを考えれば，宇宙の初期条件は全く必要がなくなるというアイデアを提案している．ただし，宇宙が空間的に至る所一定スピード以上で膨張していれば，永続的インフレーション宇宙は有限な過去の始まりをもつことが A. Borde, A.H. Guth, Vilenkin により示されているので[8]，この Linde のアイデアはそのままではうまくゆかない可能性が高い．

この永続的インフレーションという考え方は，ある意味で古い標準宇宙モデルの基礎となった宇宙原理の対局に立つものである．それは突き詰めれば，物理法則の許容する現象はインフレーションと整合的である限り，宇宙のどこかで実現するという考え方になる．これは一見，量子宇宙論の必要性に終止符を打つかに見える．しかし，その議論を詳しく見てみると，量子場のゆらぎを確率的な古典ゆらぎで置き換えるというアイデアが根底にあることが分かる．この量子ゆらぎの時空構造への作用の問題は，本来，量子宇宙論で取り扱うべき問題であったはずである．この視点から見ると，永続的インフレーションを与える宇宙の波動関数を与えて初めて，永続的インフレーションの考え方が正当化されると思われる．また，たとえ永続的インフレーション原理が正しいとしても，物理法則の許容するすべての現象が起きるかどうかは自明でない．例えば，現在の超弦理論に基づく統一理論では，余分な次元のコンパクト化が必要となる．このコンパクト化には異なるものが準連続的に無限個存在することが指摘されているが（本別冊の江口氏と立川氏による解説参照），それらの中でどのようなコンパクト化が実現されるかを決定するのもやはり量子宇宙論の役割となる．この問題に解答を与えるには，これまでのような極度に単純化されたモデルではなく，重力を含む統一理論に基づいて量子宇宙論を展開することが必要となる．量子宇宙論が再び主役の座に返り咲くには，これらの課題に明確な解答を与える必要がある．

参考文献

1) Wiltshire, D.: An introduction to quantum cosmology, in Robson, B., Vishvanathan, N. and Woolcock, W. eds., *Cosmology: The Physics of the Universe*, 473–531 (World Scientific, 1996).
2) 早田次郎：数理科学 **No.469**, 43–49 (2002). 別冊「量子の新世紀」に再録.
3) Vilenkin, A.: The future of theoretical physics and cosmology, eds. G.W. Gibbons, E.P.S. Shellard and S.J. Rankin, 649–666 (Cambridge Univ. Press, 2003) [*gr-qc/0204061*].
4) Levkov, D., Rebbi, C. and Rubakov, V.: *Phys. Rev.* **D66**, 083516 (2002) [*gr-qc/0206028*].
5) Polchinski, J.: *Phys. Lett.* **B 219**, 251–257 (1989).
6) Ambjørn, J., Gorlich, A., Jurkiewicz, J. and Loll, R.: *Phys. Rev.* **D78**, 063544 (2008) [*hep-th/0105267*].
7) Bojowald, M.: *Living Rev. Rel.* **11**, 4 (2008).
8) Borde, A., Guth, A. and Vilenkin, A.: *Phys. Rev. Lett.* **90**, 151301 (2003) [*gr-qc/0110012* (2001)].

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）

VI. 量子宇宙論からの展開

インフレーション宇宙論

横山 順一

1. 生涯最大の失敗

物理法則として重力の性質をはじめて明らかにしたのは，ニュートンによる逆自乗則の発見ですが，これは現在もなお日常生活に関わる部分に関しては，まずもって正しいと考えてよいものです．しかし，重力が非常に強いような状況や宇宙全体を考慮するような場合には，この法則だけでは不十分で，1915 年に提唱されたアインシュタインの一般相対性理論を用いなければなりません．ニュートンの理論においては，空間は物質世界の単なる容れ物であって，そこにどんな物質が存在しようとも時間や空間の在り方は永劫不変なものでした．然るに一般相対性理論では，物質やエネルギーは時間や空間の在り方と不可分であり，事実一般相対性理論において重力を記述するアインシュタイン方程式は，

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

と書け，これはエネルギー・運動量を表す $T_{\mu\nu}$ がニュートンの重力定数 G を介して時空間の曲がり具合 $G_{\mu\nu}$ を決める，という形になっています（c は光速）．

このような特質を持つ一般相対性理論を提唱した直後に，アインシュタインはこれを宇宙全体に応用し，解を求めようとしました．アインシュタインは当時の多くの人びと同様，宇宙というのは永劫不変で全体としては変化しない，静的なものであると考えていたため，そのような状態にある解を求めようとしたのでした．しかしながら，一般相対性理論の上述のような性質のために，静的な解を実現しようとしても，宇宙に多数存在する銀河等の万有引力に引きずられて，そのままでは宇宙は収縮・崩壊してしまうことがわかりました．アインシュタインは，それを避けるためには空間そのものに物質の引力を打ち消すだけの斥力があればよいと気づき，そのような性質を持つ宇宙項 Λ と呼ばれる新しい項を，アインシュタイン方程式の中に導入したのです．そしてこの空間の斥力が物質の万有引力と釣り合うことによって，静的な宇宙が実現しているのだと考えたのです．

しかし，ちょっと考えればすぐにわかるように，このような宇宙の解はたいへん不安定なものであり，現実には実現できません．すなわち，完全な釣り合いの状態より少しでも銀河密度が大きかったとすると，これらに働く万有引力が宇宙項の斥力に打ち勝ち，宇宙は収縮をはじめることになりますが，すると更に銀河密度が大きくなり，これはポジティブ・フィードバックが働く，ということですから，宇宙は更に収縮を続け，崩壊してしまうことになります．反面，銀河密度が釣り合いの値より少しでも小さいと，宇宙項によって宇宙は膨張をはじめ，今度はさらに銀河密度が減り続けることになるので，結局最終的には宇宙項だけが宇宙の主要な構成要素となり，それによって指数

関数的に膨張する宇宙になってしまうのです．つまり，アインシュタインの宇宙というのは，木琴の撥の棒の下端を下に，錘を上にして鉛直に立てようとしたのと同じようなものであり，ちょっとでも釣り合いの位置からずれると，加速的に倒れてしまうのです．机の上に撥をそうやって立てることなど現実にはできないこと，そして至る所宇宙の物質密度を一様にしてその万有引力と宇宙項に完全な釣り合いを実現することなどできないこと，を考えればアインシュタインの宇宙モデルは明らかに失敗であったと言わざるを得ません．

しかし，これは重力の振舞いを表す基礎物理学としての一般相対性理論が間違っている，ということを意味するのではなく，間違っていたのは，むしろ「宇宙は永劫不変であり，静的である」という漠然とした期待，あるいは偏見のほうだったのです．しかしそのことが判明するには，1929 年のハッブルによる宇宙膨張の発見を待たねばなりませんでした．実は，それ以前にロシアのフリードマンはアインシュタイン方程式を，宇宙項を導入せずに解き，膨張宇宙の解があることを発見していたのですが，アインシュタインはこれを当時とても嫌っていたようです．しかしさしものアインシュタインも，歴然とした観測事実の前には，静的宇宙を目指した宇宙項の導入は「生涯最大の失敗であった」と言わざるを得なかったのです．

2. 古典ビッグバン宇宙

こうして，宇宙空間というものは永劫不変なものではなく，それ自体時間的に変化していく存在であることが示唆されたわけです．現在膨張を続けているということは，時間を過去に遡ると宇宙は小さくなっていくということを意味します．すると，昔へ遡れば遡るほど，物質の密度も温度も高くなることが期待されます．温度が高くなるにつれて，熱運動のエネルギーが分子や原子の結合エネルギーを上回るようになるため，分子は原子に，そして原子は陽子や中性子に分解してしまいます．

逆に宇宙の進化を過去から現在に向かって辿ると，はじめ物質は陽子や中性子として存在し，宇宙が膨張，冷却するにつれていろいろな核反応が起こり，ヘリウムなどの元素や分子が生成したことになります．ジョージ・ガモフはこうして水素70%，ヘリウム 24%等で構成される現在の宇宙が実現した，と考えました．そして元素の組成が観測に一致するためには，現在の宇宙は温度数度 K（K：ケルビンは絶対温度の単位）の放射で満たされていると予言しました．1948 年のことでした．このように宇宙を一様に満たす放射を背景放射と言います．

ガモフの考えに従えば，宇宙ははじめ極めて小さく，火の玉のように熱い存在であったことになりますが，そのような小さなものから現在の巨大な宇宙ができたとは，多くの人にとってとても受け入れられない考えでした．ハッブルの宇宙膨張の観測が出た後も，定常的な宇宙像に固執した人もたくさんいました．

しかし，1965 年にアメリカのベル研究所のペンジアスとウィルソンによって，ガモフが予言した熱い宇宙の名残の 2.7 K の黒体放射が発見されたことによって，定常宇宙論は廃れ，ビッグバン宇宙論が標準理論の地位を確立しました．ここで黒体放射とは，熱平衡状態にある物体から出される光などの放射のことであり，この観測事実は宇宙がかつて熱平衡状態にあったことを示唆しています．宇宙の温度と大きさは反比例関係にあるため，現在の 2.7 K から出発して膨張宇宙を過去に遡ると，宇宙の温度はどんどん高くなります．大きさが現在の千分の一程度であった頃の宇宙の温度は数千 K ということになりますが，このように高温の状況では，宇宙に最もたくさん存在する元素である水素の原子はイオン化して，陽子と電子に分解します．すると光を担う光子はこれらによって盛んに散乱され，エネルギーのやりとりを活発に行いますので，熱平衡状態が実現していることになります．これによって黒体放射のエネルギー分布が実現するのです．宇宙膨張とともに温度が下がって原子核が電子と結合して電気的に中性な水素原

子になると，もはや光子は周りの物質とは散乱しなくなるので，温度は下がっても黒体放射の分布を保ったまま，まっすぐに運動することになります．これ以降の宇宙は光の伝播を妨げないため，このときを「宇宙の晴れ上がり」と呼びます．したがって現在 2.7 K 宇宙黒体放射を観測するということは，宇宙が晴れ上がった頃の昔の宇宙を直接見ることになるわけです．曇りの日には太陽光線が雲によって散乱されてしまい，太陽を直接見ることができませんが，晴れの日には遠くの太陽から約八分前に出た光がじかに見えるのと同じことです．

このように宇宙黒体放射は初期宇宙の情報を直接伝えるものとして極めて重要なため，多くの観測的研究がなされております．とりわけ宇宙の各方向から来る黒体放射の温度分布が重要で，まず 4 桁の精度での観測ではどの方向から来る放射の温度も一定であることがわかり，これはすでに晴れ上がり当時の宇宙が現在観測可能な現在の地平線スケールに亘ってほぼ一様・等方的であったことを示しています．当時の宇宙の地平線は現在より遙かに小さかったので，これはたいへん不思議なことであり，これを地平線問題と言います．一方――これは 1990 年代になってはじめて可能になったことですが――更に精度を上げた観測をすると，5 桁目にはさまざまな角度スケールに亘って温度の非等方性，すなわち温度揺らぎが観測されています．これらは後に述べるように，インフレーション理論の予言を検証し，どのようなモデルがよいか判断する手がかりも与えてくれる重要なものです．

2.7 K の宇宙背景放射の等方性から，宇宙は全体としてはよい精度で一様・等方であることがわかりますが，このような宇宙の時空構造はわずか 2 つの量で記述でき，時空の計量は，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right], \quad K = 0, \pm 1 \tag{2}$$

と書けます．$a(t)$ はスケールファクターと呼ばれる時間の関数で，単位座標隔たった 2 点の物理的な距離が宇宙膨張とともにどれだけ広がっていくか，という係数を表すものです．もう一つは宇宙空間の曲がり具合，すなわち曲率の符号を表す自由度 K です．曲率が正であると空間は球面のように閉じていることになります．曲率がちょうどゼロになるのが，おなじみのユークリッド幾何が成り立つ平坦な空間の場合で，曲率が負だと空間はイメージとしては鞍型になります．この 2 つの場合は空間は無限の大きさを持ちます．閉じた宇宙は現在は膨張していても，いずれ収縮に転じて崩壊しますが，平坦な宇宙や開いた宇宙は永遠に膨張を続けます．

古典ビッグバン宇宙論とは，つまるところ，宇宙というのは，はじめビッグバンという大爆発を起こした高温高密度の状態から出発し，それが爆発の余波で膨張，冷却するにつれて元素や星や銀河などのいろいろな階層構造を生み出しながら進化してきたのだ，という考え方です．宇宙の標準モデルの地位を確立したのは，一見何の関係もない 3 つの観測事実を見事に融合させ，統一的な宇宙描像を作り上げることができたからです．その一つは言うまでもなく，ハッブルの宇宙膨張の法則です．もう一つは 2.7 K 宇宙背景放射の存在です．これによって宇宙膨張を遡ると，昔の宇宙は高温・高密度であったことが示唆されるわけですが，これを利用して，宇宙が生まれて間もない頃に陽子と中性子を原料としてヘリウムなどの軽元素が合成されたと考えることができ，各軽元素の存在量もバリオン・光子数比の関数として理論的に計算されました．そしてバリオン・光子数比の値を 10 億分の 1 程度にとりさえすれば，その予言値が観測とピタリと一致したわけです．すなわち，ハッブルの宇宙膨張の法則，2.7 K 宇宙背景放射，そしてヘリウム等の軽元素の存在量，という 3 つの観測的事実を統一的に説明できたことがビッグバン理論の三大功績なのです．

これはまことにすばらしいことですが，どれくらい過去まで遡ることができるのだろうか，とい

う疑問は誰しも自然に持つものです．宇宙膨張をどんどん遡ると宇宙はついに一点に収縮して，物理法則をうまく適用できない特異点に突き当たってしまいます．しかしその前に，宇宙の大きさがあまりにも小さくなると，重力の量子的効果が重要になり，宇宙それ自体を量子論的に扱わなければならなくなります．このときの宇宙の大きさは重力定数 G，光速度 c やプランク定数 $\hbar$ によって決まるので，プランクスケールと呼ばれます．プランク長さ，プランク時間，プランクエネルギーをそれぞれ書いておくと，以下のようになります．

$$l_{\rm Pl} = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6\times 10^{-33}{\rm cm}, \quad (3)$$

$$t_{\rm Pl} = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5.4\times 10^{-44}{\rm sec}, \quad (4)$$

$$M_{\rm Pl} = (\hbar c^5/G)^{1/2} = 1.2\times 10^{19}{\rm GeV}. \quad (5)$$

さて，このような基礎物理定数だけで宇宙のはじまりが記述できたと考え，プランク時刻に大きさプランク長さ，温度プランクエネルギーの宇宙が生成し，膨張・冷却して現在に至ったとしてみましょう．現在の宇宙の温度 2.7 K は GeV 単位で言うと 2.3×10^{-13}GeV になります．宇宙の進化の過程で放射生成が全く起こらず，断熱的な膨張を続けてきたとすると，宇宙の大きさは温度に反比例して大きくなりますから，温度がプランクエネルギーから 2.7 K まで下がると，5.2×10^{31} 倍になりますが，プランク長さからはじめた現在の宇宙の大きさはわずか 1 ミリメートル程度ということになってしまいます！ 現在の宇宙の大きさは少なくとも百数十億光年，すなわち 10^{28}cm 以上はありますから，このような単純な宇宙進化の描像は 30 桁近い乖離をもたらしてしまったことになります．したがって，宇宙が創生以来緩やかな断熱膨張を続けて現在に至ったという考え方ではダメであり，放射生成を伴う何らかの相転移が宇宙の進化の途次に起こったと考える必要が出てきます．

放射や冷たい物質に支配されて緩やかな断熱膨張を続ける宇宙のもう一つの問題は，アインシュタイン方程式をフリードマン宇宙において書いた次の方程式（以下 $c=\hbar=1$ の自然単位を用いることにします），

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (6)$$

において左辺第二項の曲率項は宇宙が膨張しても a^{-2} に比例して小さくなるだけですが，右辺のエネルギー項は（もともと小さい宇宙項の寄与を別にすると），冷たい物質優勢の場合 a^{-3} で，初期宇宙の放射優勢の場合は a^{-4} で変化するため，時間が経つにつれて相対的に曲率項がエネルギー項に比べて大きくなっていきます．しかし，観測的には現在曲率項はエネルギー項の 10 倍よりは小さいことが知られています．ということは，スケールファクターが現在の $1/(5.2\times 10^{31})$ であったプランク時刻すなわち宇宙創生時には，曲率項はエネルギー項よりも何十桁も小さかったということになるのです．換言すると，プランク時の宇宙の曲率半径は，プランク長さよりも 30 桁以上大きくないと現在のような宇宙にはなれないのです．これを平坦性問題と言います．

上に述べたようにガモフのビッグバン宇宙論はたいへん優れた宇宙モデルでしたが，地平線問題，平坦性問題という深刻な問題を持ち，さらに――これはいわば地平線問題の裏返しの問題とも言えますが――銀河や銀河団等の大規模構造の種になった初期密度揺らぎがどのように生成したか，という問題もあります．

3. インフレーション宇宙論

上に述べたように，宇宙はその進化の途次に放射生成を伴う何らかの相転移を経験したことが示唆されますが，素粒子の統一理論を初期宇宙に応用することにより，実際にそのようなことが起こり得ることを示したのは，我が国の佐藤勝彦と米国のグース，それからロシアのスタロビンスキーでした[1)]．インフレーション宇宙論の登場です．グースと佐藤は大統一理論におけるヒッグス場が熱浴中で温度の低下とともに相転移を起こすことを宇

宙初期に適用すると，偽真空のポテンシァルエネルギーが支配的になる過冷却状態が起こることを示したのです．するとフリードマン方程式のエネルギー項は大きな真空のエネルギー，すなわち宇宙項によって支配され，指数関数的膨張が実現します．その際宇宙の地平線も指数関数的に広がると同時に (6) の曲率項は急激に減少するため，実質的に平坦な空間が実現します．すなわち，地平線問題と平坦性問題が同時に解決可能になるのです．アインシュタインが悔やんだ宇宙項が初期宇宙では非常に大きな役割を果たすのです．しかしもちろん，宇宙項の支配する時代が永遠に続いたのでは私たちの住めるような宇宙は実現できません．この理論では，相転移の進行に伴って宇宙項ゼロの真空泡が生成し，それが衝突しあうことによって，偽真空のエネルギーすなわち潜熱が放射に解放されれば，放射生成が起こり，ビッグバン宇宙の初期状態に移行することができるようになります．けれども残念ながら，1 次相転移モデルでは相転移を上手く終わらせることができず，私たちの住んでいるような一様等方宇宙を実現することができませんでした．

次に世に出たのがニューインフレーションモデルで，これは最初の理論が出た翌年に，ロシアのリンデとアメリカのアルブレヒト・シュタインハートによって提唱されたモデルです[2)]．

ヒッグス場のポテンシァルをうまく選んでやると，図 1 の原点付近のようにごく平坦に近い領域が存在することができます．このような理論では，はじめ初期宇宙の高温効果によって原点付近にト

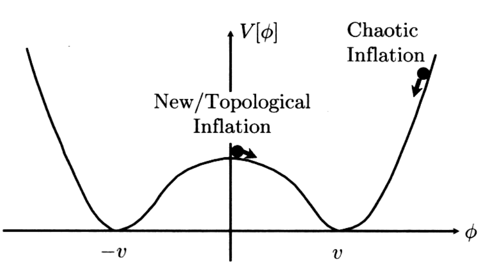


図 1　インフレーションを起こすスカラー場のポテンシァル．

ラップされていたヒッグス場は，宇宙の温度が下がってきてポテンシァルの高温補正がなくなると，すぐに相転移をはじめます．しかし，ヒッグス場が原点付近から，ポテンシァルエネルギーが最小になる点にすぐに落ちるわけではありません．ポテンシァルは原点付近では非常に緩やかな勾配しか持っていないので，ヒッグス場はゆっくりと時間をかけて最小点へと向かうのです．したがってこの間にポテンシァルエネルギーが宇宙のエネルギー密度に対して支配的な寄与をするようになります．このポテンシァルエネルギーはヒッグス場が多少動いても値はほとんど変わりませんから，前と同じような指数関数的膨張が実現します．

ヒッグス場が最小点付近まで来ると，ポテンシァルの勾配がきつくなるので，ポテンシァルエネルギーは急速に減少し，インフレーションは終わるわけです．このモデルでは泡の衝突によってインフレーションが終わるわけではないので，最初のモデルが持っていたような問題点は回避されます．インフレーションは相転移がはじまってから起こるので，比喩的に言えば私たちの宇宙はその全体が一つの泡の中にスッポリと含まれてしまっていることになるのです．

しかしこのモデルには初期条件の設定に困難があります．宇宙の進化を現在から過去に向かって時間を遡っていけば，確かに宇宙の温度はどんどん上がっていき，ついにはヒッグス場の相転移が起こり得るような高温状態に辿り着きますが，しかし，もちろん時間は過去から未来に向かって進むものです．量子揺らぎに支配されたプランク時刻から出発して正の向きに時間発展を辿ると，残念ながら大統一理論の時代にはまだ温度変化による相転移が起こるような熱的状態は実現していないのです．むしろヒッグス場は場所毎に異なる値を持ったランダムな分布をしていると考えられます．

このことを逆に利用して自然な初期条件の下でインフレーションが起こることを示したのがリンデのカオティックインフレーションモデルで，プランク時代の宇宙は大きな量子的揺らぎを持っているから，スカラー場の値も各小領域毎にランダ

ムな値をとり，中にはプランクスケールより大きな値を持つ領域も自然に存在する，という推論に基づいています．このような状況ではスカラー場はごくゆっくりとしか変化せず，そのエネルギーもなかなか減らないため，宇宙膨張率は時間が経ってもほとんど減りません．したがってインフレーション的な膨張がいとも簡単に実現します．場の値がだんだん小さくなって原点に近づくと，その変化は速くなるため，インフレーションは終わります．そしてニューインフレーションの終わりと同じように，スカラー場はポテンシャルの最小点の周りを激しく振動しはじめます．その後場のエネルギーが放射に解放されるため，ビッグバン宇宙のはじめに仮定されたような熱い火の玉の状態が物理的に実現します[3]．

このようにスカラー場がランダムな初期値をとるような状況では，場の符号も場所によって正になったり負になったりしますが，両者の境界には当然場の値がゼロになる領域ができます．それが十分広ければ，そこはニューインフレーションが必要としていた初期条件を満たしていることになるので，そこでインフレーションが起こります．このようなインフレーションは真空の位相的構造によって実現するので，トポロジカルインフレーションと呼ばれています[4]．

いずれの場合もインフレーション宇宙のダイナミクスというのは非常に単純で，フリードマン方程式 (6) のエネルギー項にインフレーションを起こすスカラー場のエネルギー密度を代入し，スカラー場の運動方程式とともに解けばよいのです．これを書き下すと

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi}{3M_{\rm Pl}^2}\rho_\phi, \qquad \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V[\phi], \tag{7}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'[\phi] = 0, \tag{8}$$

となります．なお，いったんインフレーションがはじまれば急速に宇宙は一様・等方，平坦化されるため，平坦な一様等方時空で考えれば十分なことを用いました．ニューインフレーションのように勾配の緩やかなポテンシャルを与えれば，場の進化が緩やかでポテンシャルエネルギー優勢となりインフレーションが起こること，またカオティックインフレーションのようにスカラー場の値が $M_{\rm Pl}$ よりずっと大きいと，スカラー場の方程式の第二項の摩擦項が効いて場の進化が妨げられ，やはりインフレーションが起こることが見て取れます．これらの状況で，上式の 2 階時間微分項と 1 階時間微分の自乗項を無視して解いてみて，インフレーション的膨張を起こす無矛盾な解が得られることを確かめてみて下さい．

これ以外に，スカラー場を 2 種類以上導入し，一方のスカラー場のダイナミクスによってニューインフレーションの熱的相転移と似た状況を作り出し，やはりその偽真空のエネルギーによってインフレーションを起こそうという，ハイブリッドインフレーションと呼ばれているモデルもあります[5]．

こうして，スカラー場の初期条件に対する考え方とそのダイナミクスに応じ，ニュー，カオティック，トポロジカル，ハイブリッド，とさまざまなモデルが存在することがわかります．しかしもちろん，初期宇宙の進化は高エネルギー物理，素粒子論によって記述されるべきものですから，これらに対応する素粒子モデルをきちんと構築しなければ，絵に描いた餅にすぎません．インフレーションは，素粒子の標準理論よりは遙かに高いエネルギースケールで起きたと考えられる現象であり，また後述の密度揺らぎの振幅が観測と一致するためには，スカラー場はごく平坦なポテンシャルを持たねばなりませんから，そのためには，超対称理論そして超重力理論を用いることが要請されます．実際，このような観点から多数の素粒子論的モデルが提唱されています．これをここで網羅するのは到底不可能ですが，ロシア人の共同研究者に倣って，我が同胞の文献だけいくつか挙げておきましょう[6]．それでもこれらで上に挙げたすべての機構が網羅されます．なお，こうした素粒子論に出てくるスカラー場によってインフレーションを起こすモデルのほかに，アインシュタインの

重力理論に量子補正を加えるなどして，重力の作用だけでインフレーションを起こすモデルも提唱されています．これらもインフレーションを起こすメカニズムとしては，カオティック型，トポロジカル型に分類することができます[7]．

4. インフレーション理論の予言

それではこれらのメカニズムのうちのどれが実際に正しかったのか，検証することができるかどうか，次に検討してみましょう．

宇宙の大域的な一様・等方性，平坦性を実現するという点ではこれらのモデルはすべて共通であり，それはいずれも (7) と (8) で記述できるということからもわかります．しかし実際の宇宙の進化は古典的な方程式であるこれらの式によって完全に記述されるわけではありません．インフレーションを起こすスカラー場はあくまでも量子場であって，その量子論的な効果を取り入れる必要があります．すると，ϕ の進化は至る所 (8) の古典解 $\phi_{cl}(t)$ を辿るのではなく，量子揺らぎ $\delta\phi(\boldsymbol{x},t)$ によって場所毎に少しずつ異なる値 $\phi(\boldsymbol{x},t) = \phi_{cl}(t)+\delta\phi(\boldsymbol{x},t)$ をとることになります．これは，$\delta t(\boldsymbol{x},t) = \delta\phi(\boldsymbol{x},t)/\dot{\phi}_{cl}(t)$ という量を定義すると，1 次摂動の範囲では $\phi(\boldsymbol{x},t) = \phi_{cl}(t+\delta t(\boldsymbol{x},t))$ と書き換えることができます．つまり量子揺らぎによってインフレーションが早く終わる所と遅くまでかかる所が出てくるのです．これはもちろん時空の計量にも影響し，インフレーションによって実現するのは (2) で $K=0$ とした時空ではなく，

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t+\delta t(\boldsymbol{x},t))d\boldsymbol{x}^2 \\ &\cong -dt^2+a^2(t)(1+2H\delta t(\boldsymbol{x},t))d\boldsymbol{x}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

というものであることがわかります．すなわちこの宇宙は完全には一様・等方ではなく，曲率揺らぎ $H\delta t(\boldsymbol{x},t)$ を含んでいるのです．これはたいへん結構なことで，これによって観測されている宇宙背景放射の揺らぎや銀河等の階層構造の種となる密度揺らぎが与えられる，と考えることができるのです．しかし温度揺らぎの 10^{-5} という値を再現する素粒子論的モデルを作るのはなかなかたいへんで，これをいかに自然に実現するかがこの分野の研究者の腕の見せ所となっています．インフレーション中の量子場の理論によると，宇宙膨張時間 H^{-1} あたり初期波長 H^{-1}，振幅 $\delta\phi = H/(2\pi)$ 程度の揺らぎが次々とランダムに生成することが知られているので，観測される曲率揺らぎは

$$H\delta t \cong \frac{H^2}{2\pi|\dot{\phi}_{cl}|} \quad (10)$$

程度であるということがわかります．但し右辺は今注目しているスケールがインフレーション中に波長 H^{-1} 程度であった時刻において求めるものとします．インフレーション中は H も $\dot{\phi}_{cl}$ もごく緩やかにしか変化しませんから，結果としてこの曲率揺らぎはスケールによらず，ほぼ一定になります．これをスケール不変揺らぎと言います．しかしそれでもごくわずかの変動はあるので，それが上述のさまざまなインフレーションモデルを峻別する手がかりを与えてくれることになります．揺らぎのスペクトルの波数による対数微分をスペクトル指数 n と言いますが，歴史的な理由で完全にスケール不変な揺らぎを $n=1$ となるように定義します．つまりインフレーションは通常 n が 1 にほぼ等しい揺らぎを予言するわけです[8]．

このような曲率揺らぎに加えて，インフレーション中には同じような量子論的起源のテンソル揺らぎ，すなわち重力波も生成します[9]．こうした重力波は背景放射の非等方性を生成することになる反面，構造形成の種にはならないので背景放射の非等方性にどれくらいテンソル起源のものが混ざっているか，ということはその後の宇宙の進化に影響してきます．また，生成するテンソル揺らぎと曲率揺らぎの比 r_T はインフレーションのモデルによって変わってくることになります．そして，r_T と n の値から，どのようなインフレーションモデルがよいか，図 2 のように見当をつけることができます[10]．

しかし，詳細に見ていくと，生成する曲率揺らぎ

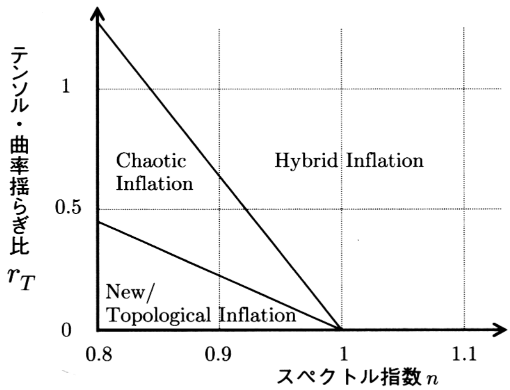


図 2　さまざまなインフレーションモデルのスペクトル指数，テンソル・曲率揺らぎ比の予言．

のスペクトルは，単にスペクトル指数だけで特徴づけられるのではなく，ポテンシァルの形によってさまざまな微細構造を持ってくることになります．とくに MAP 衛星（のちに WMAP と改称）や PLANCK 衛星によって宇宙背景放射の非等方性のスペクトルが詳細に観測されるようになれば，インフレーション時に生成するスペクトルの微細構造までわかることになるはずです．そのような観点から，私たちは現在，背景放射の非等方性から初期宇宙の曲率揺らぎのスペクトルを再構成する研究に取り組み，それが可能であることを示しております[11]．実際に観測データが得られた暁には，インフレーションの具体的な超重力モデルまで迫ることができるようになるかもしれません．

思えばインフレーション宇宙論が提唱されて二十余年．ようやくその具体的なモデルを天文学的な観測によって検証できるようになりつつあるのです．それはまた，「望遠鏡によって素粒子の世界を見る」ということでもあるのです．

5. その後の報告

本稿の初出は 2003 年 2 月号でした．まさにその号が出た直後，2003 年 2 月 11 日に WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) 検出器による宇宙マイクロ波背景放射の非等方性の観測結果が発表されました[12]．それによって，現在の宇宙の物質組成が誤差まで含めてかなり精細にわかるようになりました．すなわち，宇宙は主にバリオン，ダークマター，ダークエネルギー（これは宇宙の加速的膨張を実現するものであり，その正体は正の宇宙項か，あるいは負の圧力を持つ未知の物質であると考えられている）で構成されていると考えられていますが，WMAP の観測にハッブル宇宙望遠鏡のデータを援用することにより，その割合がほぼ決定でき，バリオン約 4%，ダークマター約 23%，ダークエネルギー約 73%となることがわかりました．また宇宙の空間曲率は，インフレーション宇宙論の予言通りゼロであると考えてよく，それ以前に Ia 型超新星の観測によって指摘されていたとおり，宇宙は現在加速膨張期にあることを確認しました．また，宇宙年齢は 137±2 億年と推定されました．宇宙論的パラメタに関するこれらの値は，WMAP 以前のさまざまな観測結果を综合して得られたいわゆる “concordance model” の値とよく一致しており，WMAP の意義はその誤差を大幅に縮めたことにあります．その後，3 年分，5 年分のデータ解析結果も公開されていますが，大枠としては変わっていません．

こうして現在の宇宙のことがよくわかるようになると，それを足場に初期宇宙のこと，特に温度ゆらぎのもとになった初期密度・曲率ゆらぎのこともかなり正確にわかるようになりました．WMAP が明らかにしたのは，初期ゆらぎは標準的なインフレーションモデルの予言通り，ランダムガウス分布にしたがい，しかもほぼスケール不変なスペクトルを持った断熱ゆらぎであった，ということです．その意味ではインフレーション宇宙論が，宇宙の大域的一様・等方性，平坦性を説明するだけでなく，ゆらぎの生成機構としても正しいものであることを確認したといってよいでしょう．

本稿で述べたようなインフレーション宇宙論が大枠として正しかったことを観測的に検証できたというのは，まことに嬉しいことですが，すると次の課題として，それでは一体どうやってインフレーションは起こったのか，その具体的な素粒子

論的メカニズムは何だったのか？ という疑問が湧いてきます．それについては，WMAP の初年度データは興味深い示唆を与えていました．つまり，ゆらぎのスペクトル指数が 1 からずれていただけでなく，スペクトル指数自体がスケールに依存し変化していた可能性が 95%以上ある，というのです．これはインフレーションモデルを作るに当たっての強い制限になりますが，さいわいわれわれは，そのようなスペクトルを実現するモデルの構築に成功しました[13]．しかし残念なことに，その後の 5 年目データではそのようなスケール依存性は，あったとしても 7 割程度の可能性に過ぎないことがわかり，現在では標準的なインフレーションモデルで十分であることになっています．

5 年分のデータで最近注目を浴びているのは，ゆらぎの統計分布がガウス分布からずれている可能性が出てきたということです．とはいってもそのズレを表す $f_{\rm NL}$ パラメタ[*1]は，平均としてはゼロではないものの，統計的には十分ゼロと無矛盾であって，標準的な理論が除外されたというわけでは全くありません．これに関する論文が現在山のように出ていますが，そろそろ出口戦略を考えたほうがよいかもしれません．

最近の研究のもう一つのトレンドは，本稿で述べたような単純なスカラー場の理論ではなく，超弦理論に基づいてインフレーションを起こそう，という研究です．すなわち，余剰次元の幾何学的な自由度からインフレーションを起こせるようなポテンシァルを持ったスカラー自由度を見つけ出そう，ということです．これにはさまざまな試みがありますが，なかなかむずかしい，というのが現状です[14]．

最後に，スペクトルの微細構造については，われわれはいくつかの再構築法を用い，スケールにして 700 Mpc（1 Mpc は 326 万光年）程度のところにべき乗則からの有意なズレを見出しました[15]．これが単なる統計的な稀現象なのか，物理的な意味を持っているのか，今後注意深く検討を進めたいと考えています．

*1） ただし，「ガウス分布でない」，といった瞬間，統計分布としては無限の可能性が出てくるので，このパラメタはそのうちのタッタ 1 個の特徴を取り出したに過ぎません．

参考文献

1) K. Sato, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **195**, 467 (1981); A.H. Guth, *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981); A.A. Starobinsky, *Phys. Lett.* **91B**, 99 (1980).
2) A.D. Linde, *Phys. Lett.* **108B**, 389 (1982); A. Albrecht and P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
3) A.D. Linde, *Phys. Lett.* **129B**, 177 (1983).
4) A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3137 (1994); A.D. Linde, *Phys. Lett.* **327B**, 208 (1994).
5) A.D. Linde, *Phys. Rev.* **D49**, 748 (1994).
6) H. Murayama, H. Suzuki, T. Yangagida, and J. Yokoyama, *Phys. Rev.* **D50**,2356 (1994); Izawa K.-I., M. Kawasaki, and T. Yanagida *Phys. Lett.* **411B**, 249 (1997); M. Kawasaki, M. Yamaguchi, and T. Yanagida, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3572 (2000); M. Kawasaki, N. Sakai, M. Yamaguchi, and T. Yanagida, *Phys. Rev.* **D62**, 123507, (2000); M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Phys. Rev.* **D63**, 043506, (2001).
7) J. Ellis, N. Kaloper, K.A. Olive, and J. Yokoyama, *Phys. Rev.* **D59**, 103503 (1999).
8) S.W. Hawking, *Phys. Lett.* **115B**, 295 (1982); A.A. Starobinsky, *Phys. Lett.* **117B**, 175 (1982); A.H. Guth and S-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110 (1982).
9) A.A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30**, 682 (1979); V.A. Rubakov, M.V. Sazhin, and A.V. Veryaskin, *Phys. Lett.* **115B**, 189 (1982).
10) W.H. Kinney, *Phys. Rev.* **D58**, 123506, (1998).
11) M. Matsumiya, M. Sasaki, and J. Yokoyama, *Phys. Rev.* **D65**, 083007 (2002).
12) WMAP の成果については，http://lambda.gsfc.nasa.gov/ に論文一覧表が載っています．
13) M. Kawasaki, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Phys. Rev.* **D68**, 023508 (2003).
14) D. Baumann and L. McAllister, arXiv:0901.0265 [hep-th].
15) R. Nagata and J. Yokoyama, *Phys. Rev.* **D78**, 123002 (2008); **79**, 043010 (2009).

（よこやま・じゅんいち，
東京大学ビッグバン宇宙国際研究センター）

VI. 量子宇宙論からの展開

宇宙論と量子カオス

井上 開輝

1. はじめに

宇宙論と量子カオスの間にはいかなる接点があるというのだろう？ 我々が現在見通せる最大の距離（宇宙の地平線長）は約数百億光年（$= 10^{26}$ m），一方，量子デバイスの典型的な大きさは約 100 nm である．つまり両者の間には 10^{33} ものオーダーの開きがある．お互いの関係と言ってもピンとこないかもしれない．

ところが過去を遡れば，宇宙はどんどん小さくなり，やがて，現在観測可能な領域のスケール L がナノメートル以下になる時期に達する．そのような小さなスケールではもはや量子効果を無視することはできない．特にプランク長さ以下 $L < 10^{-33}$ cm になったときは時空自身が量子的に揺らぐことになる．「観測者」のいない量子的宇宙がいかにして自分自身で古典化するかは大問題であり，様々な説明が試みられているが，いまだ定説は存在しない．背景時空が十分古典的と見なせる場合，宇宙膨張のタイムスケールの間に光が進む距離に比べて，量子揺らぎの波長が充分長ければ，量子的相関はなくなり，揺らぎは「古典的」と見なせるだろう．今日では我々の宇宙に存在する星，銀河，銀河団といった構造はこのような古典化した真空の量子揺らぎの種が重力的に成長した結果生み出されたものである，と考えられている．

もし，宇宙が空間的に閉じており，平均的に負の曲率を持つのであれば，自由粒子の古典力学系は強いカオス系であるから，時空や物質の量子揺らぎもカオス的な振舞いを示すかもしれない．宇宙膨張のタイムスケールに比べて，波束が空間をぐるっと一周するタイムスケールが短ければ，空間の大きさに比べて充分小さいスケールの揺らぎに対してカオス的な混合が起こるだろう．

宇宙の一様等方化の過程の中で，このような混合は**インフレーション**[*1)]以前の非常に初期の段階で起こったのかもしれない．もし，そうだとすれば，量子カオスは，我々の住む空間的にほぼ一様等方な宇宙の真の起源を説明するために本質的な役割を果たすことになる．残念ながら，そのような非一様非等方な空間の非摂動的なダイナミクスの解析は古典的なレベルでも極めて難しい．

しかし，後に説明するように，我々は約数百億光年のスケールにわたる宇宙の空間的な線型的揺らぎを実際に観測することができる．**ビッグバン**の残り火が，宇宙膨張によるドップラー偏移を受け，マイクロ波の輻射としてあらゆる方向から地球上に降り注いでいるのだ．この残り火にみられる微かな温度の揺らぎから，宇宙の地平線長程度のスケールにおける揺らぎの性質を明らかにすることができる．もし，宇宙が地平線長程度のスケールで閉じており，曲率が負であれば，古典化した量子揺らぎの中に古典的カオスの痕跡を見出すこと

*1) 宇宙初期に起こった加速膨張を指す．

が可能になるだろう．

2. 宇宙は閉じている？

2.1 局所一様等方モデル

現在の標準モデルである**ビッグバン宇宙モデル**の空間成分は一様等方であり，宇宙膨張，宇宙マイクロ波背景輻射および軽元素（水素，ヘリウム，重水素およびリチウム）の質量比という，3つの観測事実を首尾よく説明することに成功した．宇宙論の教科書を繙くと，標準モデルはその空間曲率（定数）によって3種類に分類され，曲率が正の場合は体積が有限，ゼロまたは負の場合は無限であると記述されている．

だが，これは正しくない．実は曲率がゼロや負の場合であっても空間を閉じさせることは可能なのだ．今，平坦な無限の大きさを持つユークリッド平面上に正方形のタイルを仮想的に考え，向かい合う辺を平行移動によって，それぞれ同一視してみる．すると，得られた空間は2次元トーラスと同相になる．同様にして，ユークリッド空間中に立方体のセルを仮想的に考え，向かい合う面をそれぞれ平行移動によって同一視すると，3次元トーラスと同相な空間が得られる．このような閉じた空間中では観測者を出発した光はいつかは再び観測者の下に帰ってくることになる．空間内の光の測地線は閉じたループを成し，それを連続変形によって1点につぶすことはできない．つまり，非自明なトポロジーを持つことになる．空間は一様で平坦であるにもかかわらず，その体積は有限である．天体の分布は，見かけ上，無限の空間に対してある種の周期境界条件を課した場合と同等になる．

一般に非自明なトポロジーを持つ閉じた定曲率空間は局所的には一様等方（曲率一定）だが，大域的には非一様非等方である[*2]．例えば，向かい合う面を平行移動で貼り合わせて作られる3次元トーラスは大域的には一様だが等方ではない．これは，空間上の点 x を通る測地線ループの長さの最小値 l_x が，方向によって違うことから明らかである．大域的に非一様な空間では，l_x は考える観測点 x にも依存する．

実は一般相対性理論を記述するアインシュタイン方程式は物質と時空の局所的な関係を定めるものであるが，それらの境界条件に対しては何も制限を与えない．したがって，曲率が一定つまり空間が局所的に一様等方であれば，計量の時間発展はすべて同等であり，前述の3つの観測事実に抵触することはない．これらの局所的に一様等方なモデルでは物質と時空の境界条件は空間のトポロジーを指定することによって与えられる．したがって，曲率だけでは，空間が閉じているか開いているかは決まらない．

後で述べるが，曲率が負であっても，空間を閉じさせることができるので負曲率（双曲型）のモデルを「開いた」宇宙モデルと呼ぶことは適切ではない．宇宙物理の分野ではこの誤った呼称が頻繁に使用されているが，実に嘆かわしいことである．

2.2 閉双曲宇宙モデル

今後，閉じた負の定曲率空間（閉双曲空間）を空間成分に持つ宇宙モデルを**閉双曲宇宙モデル**と呼ぶことにする．

簡単のため，まず，2次元の場合を考えよう．曲率半径 R の負の定曲率面は，ミンコフスキー空間 (x_0, x_1, x_2) に双曲面として埋め込むことが可能である．

$$-R^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2. \tag{1}$$

今後距離はすべて曲率半径で測ることにしよう $(R=1)$．扱いやすくするため，双曲面をコンパクトな領域に射影してみる．点 $\mathrm{P}(-1,0,0)$ を基点とし，$x_0>0$ の双曲面上の点 H を結ぶ線分 $\overline{\mathrm{PH}}$ と平面 $x_0=0$ の交点を C とすると，C の集合は半径1の円盤となる．この円盤はポアンカレ円盤と呼ばれ，円周は無限遠点を表す．交点 C をデカルト座標 (y_1, y_2)（ポアンカレ座標）で書くと，計量は

$$ds^2 = \frac{4(dy_1^2 + dy_2^2)}{(1 - y_1^2 + y_2^2)^2} \tag{2}$$

*2) 正の定曲率を持つ射影空間 $\mathbf{RP}^3$ は唯一の例外であり，大域的にも一様等方である．

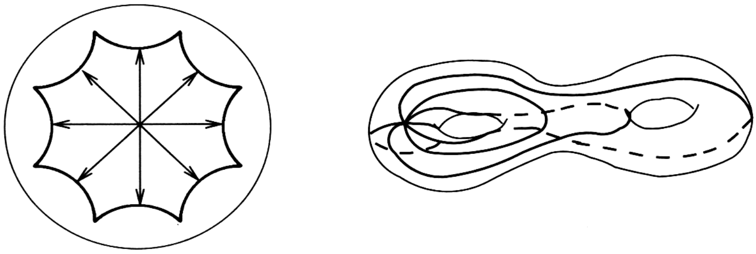


図 1 ポアンカレ円盤内の正 8 角形のタイルの貼り合わせ（左）と種数 2 のトーラス（右）.

と，共形的に平坦な形式に書ける．つまり，角度は平坦なユークリッド平面のものと同一である．しかし，測地線は円周に直交する円弧となる．同様に原点を基点とし，$x_0 > 0$ の平面 $x_0 = 1$ に射影すれば，双曲面は半径 1 の円盤（クライン円盤）に写される．その場合，角度は平坦なユークリッド平面の場合と異なるが，測地線は真っ直ぐな線分で表せる．クライン円盤上のデカルト座標をクライン座標と呼ぶ．

さて，最も簡単な閉双曲面を構成してみよう．まず，測地線で囲まれた正 8 角形のタイルを用意し，向かい合った辺を同一視する．すると，2 つのドーナッツがくっついたような種数（穴の数）$g = 2$ のトーラスができる（図 1）．ここでなぜ正 8 角形のタイルが必要なのか考えてみよう．ガウス–ボンネの定理により，種数 g の面積 A は双曲面上では $A = 4\pi(g-1)$ となる．したがって $g > 1$ である．一方，多角形の面積 A と頂点のまわりの角度の総和 X および頂点の数 V の間に $A = (V-2)\pi - X$ の関係がある．したがって，正 8 角形の各頂点のまわりの角度の総和は 2π となり，タイルの貼り合わせの条件を満たせる．同様に種数 $g > 2$ のトーラスを作るには $V = 4g$ 角形のタイルを用いればよい．

3 次元の閉双曲空間のトポロジーの分類は現在も未解決の難題であるが，その構成法に関しては 80 年代に数学者である Thurston たちによって精力的に研究が進められ，現在では，コンピューターを用いて，1 万個以上の例が知られるようになった[1]．曲率半径の 3 乗で規格化した体積 v には下限 $(> 0.1667\cdots)$ が存在することが知られている

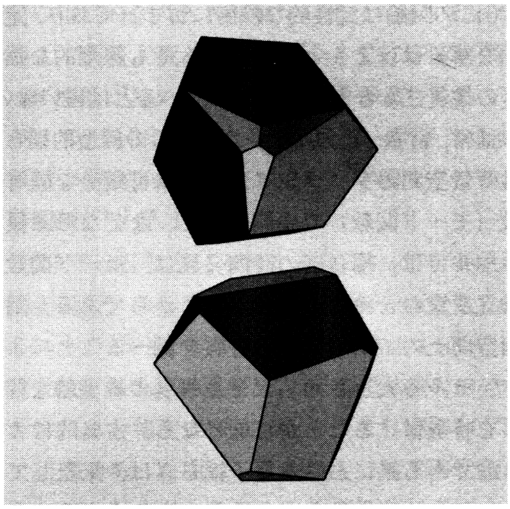


図 2 2 方向から見たクライン座標におけるウィークス多様体のセル.

（上限は存在しない）．既知の閉双曲空間の中で体積が最も小さいのは，Weeks によって発見された**ウィークス多様体**[2]であり（図 2），およそ $v = 0.94$ である．量子宇宙論の示唆する通り，もし，負の曲率を持つ体積の小さい宇宙が生まれる確率が高いのであれば[3]，現在の地平長が曲率半径程度ならば，セルを特徴付ける大きさが現在の地平長と同程度であることを説明することができる．

ところで閉双曲空間における自由粒子の測地線流は強いカオス系であることが数学的に証明されている．負の曲率は近接した測地線間の距離の指数関数的増大をもたらすが，これらの測地線がコンパクトな空間内で「折り返される」と，さらにエルゴード性と混合性を持つようになる．

このことから，初期宇宙において，非一様非等方な揺らぎの**カオス的混合**が起こり，インフレー

ションの初期条件（＝地平線を超えるスケールでの一様等方性）を与えたというシナリオも提案された[4)]．だが，曲率半径程度のスケールにおける揺らぎの性質に関しては古典論的な類推が成立する明確な理由はなく，カオス的混合が起こるかどうか必ずしも自明ではない．ところが，後述するように，低励起固有状態のモード関数がある種のランダム性を備えているという数値解析の結果もあり，効率的な混合が起こる可能性もある．いずれにせよ，この議論は定性的な段階に留まっており，定量的な解析はほとんどない．そもそも線型的な揺らぎの性質さえも十分理解されているとは言い難い．

通常，計量（重力ポテンシャル）の線型的揺らぎは背景空間のラプラシアンの 2 乗可積分な固有関数（モード関数）で展開される．なぜなら，摂動レベルでは，揺らぎの時間発展は，モード関数の独立な重ね合わせで表現されるからである．閉双曲空間上のモード関数の性質を調べることによって，セルの大きさのスケール程度の線型的な揺らぎを特徴付けることが可能になる．古典的にカオス的である系における量子揺らぎは，果たしてカオス的な性質を備えているのであろうか？

3. モード関数の疑似ランダム性

モード関数は次のヘルムホルツ型方程式を満たす 2 乗可積分な関数として定義される．

$$(\Delta + k^2)u_k(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3}$$

ここで，波数は k，共動座標[*3)]は $\boldsymbol{x}$ で表される．閉双曲空間上のモード関数を求めるには，図 1 のようなセルの境界面で定義される周期境界条件を課してヘルムホルツ型方程式を解く必要がある．ここでラプラシアン Δ をハミルトニアンと見なすと，$u_k(\boldsymbol{x})$ はエネルギー $E=k^2$ の固有状態にある自由粒子の波動関数に対応することが分かる．前述した通り，閉双曲空間上の自由粒子の古典系はカオス的であるので，エネルギー準位の高い極限（$k \gg 1$）では，ランダム行列理論の予測に従い，揺らぎはガウス分布に従うランダム場として振る舞うことが期待される．

ランダム性を調べるため，モード関数 $u_k(\boldsymbol{x})$ を規格直交化した後，双曲空間上の 2 乗可積分な固有関数 $X_{\nu l}(\chi)Y_{lm}(\theta,\phi)$ で展開してみよう．ここで $X_{\nu l}$ は動径方向の固有関数，Y_{lm} は球面調和関数である．擬球面座標（$R=1,\chi,\theta,\phi$）では，展開係数 $\xi_{\nu lm}$ を用いて

$$u_\nu = \sum_{l,m} \xi_{\nu lm} X_{\nu l}(\chi) Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{4}$$

と書ける．ここで $\nu=\sqrt{k^2-1}$ であり，双曲空間上で定義される実効的な波数である．モード関数の空間的な揺らぎの情報は展開係数 $\xi_{\nu lm}$ にすべて含まれる．もし，この展開係数が「ランダム」であれば，モード関数の揺らぎも「ランダム」であることになる．系が古典的にカオス的であれば，エネルギー準位の高い極限（$k \gg 1$）では，揺らぎはガウス分布に従うランダム場として振る舞うことが期待される．

数値計算の結果，驚くべきことに，エネルギー準位の低い，すなわち波数が小さい場合であっても，よい近似で展開係数はガウス分布に従うランダム数と見なせることが明らかになった[5,6)]．ある向きを持った観測点に対し，$l(l+1)+m+1$ の順に並べた展開係数は平均がゼロ，分散が ν^{-2} のガウス分布に従う．ただし，大角度の成分，すなわち l が小さい[*4)]場合は，ランダム性が弱くなる傾向があり，厳密には，$l \gg 1$ の極限においてのみ成立するものと考えられる．また，「隠れた対称性」[*5)]の固定点においては，展開係数の間に強い相関が生じてしまうので，どのような観測者に対しても，常にガウス的ランダム場として見なせるわけではない．ただし，この場合，「隠れた対称性」を表す離散群で割った空間に対しては，揺らぎは

*3） 物質と共に動く座標の意．

*4） $\theta=180°/l$ の角度スケールに対応する．

*5） 空間を決定するセル（ディリクレ基本領域）を有限個使って敷き詰められるような，より大きな体積を持つセルの対称性を指す．閉双曲ビリアードモデルにおけるエネルギー準位間隔分布にカオスの痕跡が明確にみられない原因として，この「隠れた対称性」による効果が考えられる．

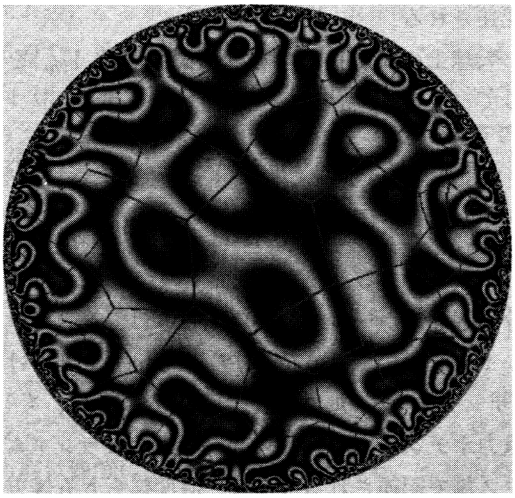


図 3 ウィークス多様体上の自由粒子の基底状態（$k=5.27$）の固有モード．ポアンカレ半球の断面上の値を表している．実線はセルの境界面を示す．

依然としてランダム性を保つものと思われる．

このモード関数の**疑似ランダム性**の起源は一体何であろうか？ 今，十分小さい角度スケール $l \gg 1$ の寄与を考えよう．この場合半径の非常に大きい球面 S 上での揺らぎを考えることと同等である．S をセル内に引き戻すことを考えよう．すると測地線同様 S はエルゴード的に「ランダム」にセル内を埋め尽くす．したがって，S 上の揺らぎは特別な方向を持たない．このことから，揺らぎは S 上では事実上，等方なガウス的ランダム場と見なせるだろう．l が小さくなれば，対応する球面の半径も小さくなるので，ランダム性は弱くなるものと考えられるが，詳しいことはよく分かっていない．

4. 宇宙マイクロ波背景輻射

1964 年に電波天文学者 Penzias と Wilson は新しい電波アンテナの性能をテストするため，様々なノイズの原因を探っていたが，最後にどう頑張っても取り除けないノイズが宇宙のあらゆる方向から等しく放射されていることを突き止めた．彼らは全く偶然に，宇宙が高温高密度でプラズマ状態であった頃の光の化石を発見したのである[*6]．

ビッグバン後数十万年を経ると，宇宙の絶対温度が約 3000 K まで下がる．すると，それまでプラズマ状態であった電子と陽子が結合して中性水素になり，電子と相互作用していた光子が電子の束縛を離れて自由に動き回れるようになる．いわゆる「宇宙の晴れ上がり」である．そのとき脱出した光が我々の所に届いたものが背景輻射の正体と考えられている．「**宇宙の晴れ上がり**」の時期の宇宙の相対的な大きさは現在に比べておよそ1000分の 1 であり，我々の所に届くまでに宇宙膨張によって波長はおよそ1000 倍に引き伸ばされる．したがって，現在は輻射は電波（ミリ～マイクロ波）の領域で観測されることになり，**宇宙マイクロ波背景輻射**[*7]と呼ばれている．

1989 年に打ち上げられた COBE（宇宙背景輻射探査衛星）の観測から，背景輻射の振動数に関するエネルギー分布は 160 GHz（波長 1.88 mm）で最大値をとる絶対温度 2.73 K の黒体輻射の分布と非常によい精度で一致した．つまり宇宙がプラズマ状態であった頃は，よい精度で熱平衡状態が保たれていたのである．また，背景輻射の天空上における空間的な**温度揺らぎ**は，大角度スケール（10 度以上）で $(2\sim3)\times10^{-5}$ K 程度であることも明らかになった．

この相対的には約 10 万分の 1 程度という温度揺らぎは，宇宙の晴れ上がり時における重力ポテンシャルの空間的な揺らぎを表している．重力ポテンシャルの井戸の底から出た光は赤方偏移を受けるので，観測される温度は下がる．つまり，温度の高低は，重力ポテンシャルの深さの高低に対応している（**ザックス−ウォルフェ効果**）．

この重力ポテンシャルの空間的な揺らぎの相関や振幅の大きさから宇宙に含まれている物質の総量や種類，膨張率，といった貴重な情報を得ることができる．もし，現在の地平線長程度のスケー

---

*6） この業績により，Penzias と Wilson は 1978 年度ノーベル物理学賞を授賞した．

*7） 一般には，電磁波は波長 1 mm から 1 cm はミリ波，1 cm から 10 cm はマイクロ波と呼ばれているが，ここではミリ波とマイクロ波を合わせて「マイクロ波」と呼ぶ．

ルで宇宙が空間的に閉じていれば，当然，そのスケールにおける重力ポテンシャルの空間的な揺らぎにも影響を与えるはずである．つまり，大角度スケールの温度揺らぎを精密に観測することによって宇宙の大きさと「形」，すなわちトポロジーに制限をつけることが可能なのだ．

5. 宇宙のトポロジーの探索

5.1 周期構造による探索

もし我々の宇宙の空間成分が閉じており，そのスケールが地平長に比べて十分小さければ，宇宙背景輻射の温度揺らぎのパターンに周期構造が見出されるはずである．1996年にCornishたちは，定曲率ならば，どのようなトポロジーを持つ空間に対しても適用可能な探索法を提案した[8)]．それは，天球上に同じ半径を持つ2つの円の組を描き，その円上での揺らぎのパターンがお互い一致するかどうか調べる，というものである．宇宙マイクロ波背景輻射の成分である光子は，「宇宙の晴れ上がり」時に，ほぼ同時にある場所を起点として出発した．その起点の集合である2次元球面を最終散乱面と呼ぶ．もし，空間が十分小さければ最終散乱面は空間をぐるっと包み込んで自分自身と交わってしまう．そして，その交線である最終散乱面上の円を出発した光子は異なる2つの方向からほぼ同時刻に我々のいる観測点に到達するのである．つまり，この2つの円の円周上の方向（互いに逆向き）に沿って，全く同じ温度揺らぎのパターンがみられることになる．したがって，もし，そのようなパターンの一致が統計的に有意に見出されれば，空間が非自明なトポロジーを持つ有力な証拠となり得る．

5.2 揺らぎの非ガウス性による探索

前述した通り，非自明なトポロジーを持つ局所一様等方モデルは大域的には非一様非等方である．したがって，ある向きを持った観測者に対しては，揺らぎは非一様非等方なガウス的ランダム場[*8)]で記述される．

天球上の温度揺らぎを球面調和関数 Y_{lm} を使って

$$\frac{\Delta T}{T}(\boldsymbol{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\boldsymbol{n}) \tag{5}$$

と書き表そう．ここで $\boldsymbol{n}$ は天球を指し示す方位ベクトルである．最終散乱面上の点 $\boldsymbol{x}$ における十分大きなスケールでの温度揺らぎは，重力ポテンシャルを用いて，$\Delta T(\boldsymbol{x})/T \sim \Phi(\boldsymbol{x})/3$ と書ける（ザックス–ウォルフェ公式）．したがって，もし，重力ポテンシャルの揺らぎが等方的なランダムガウス場で記述されるならば，温度揺らぎも等方的なランダムガウス場で記述される．つまり，展開係数 a_{lm} はすべて独立であり，ガウス分布に従うランダム数となる．

ところが，空間が非等方になると，重力ポテンシャルの揺らぎの各モードの振幅が，ガウス分布に従う独立なランダム数で表されていても，展開係数 a_{lm} はもはや独立ではない．つまり，揺らぎは非等方になるのである．その理由を考えてみよう．

まず，平面波を球面座標におけるモード関数で展開する．

$$\begin{aligned} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} &= \sum_{l,m} \xi_{klm}\, j_l(kx) Y_{lm}(\boldsymbol{n}), \\ \xi_{klm} &= 4\pi (i)^l\, Y^*_{lm}(\hat{\boldsymbol{k}}). \end{aligned} \tag{6}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{k}}$ は $\boldsymbol{k}$ 方向の単位ベクトル，j_l は球ベッセル関数，i は虚数単位を表す．今，辺の長さが L である立方体のセルを持つ3次元トーラスモデルを考えよう．セルの表面上で周期境界条件を課すと，許される波数は不連続の値 $k = 2\pi(n_1^2+n_2^2+n_3^2)^{1/2}/L$（$n_i$ は整数）をとる．t_* を最終散乱の時刻，y を共動座標における現在の地平長とすると，ザックス–ウォルフェ公式から，

$$\begin{aligned} a_{lm} &= \sum_k \Phi_k\, \xi_{klm} F_{kl}, \\ F_{kl} &= \frac{1}{3}\Phi_t(t_*) j_l(ky) \end{aligned} \tag{7}$$

が得られる．もし，重力ポテンシャルのフーリエ成分 Φ_k が，各々独立でかつガウス分布に従うランダム数であれば，a_{lm} もガウス分布に従うラン

*8） 真空の揺らぎの振幅の rms 値は各モードに関してガウス分布に従うものと仮定した場合．

ダム数になるが，ξ_{klm} は，球面調和関数に比例するので，異なる角度スケール（$l-l'$）や異なる方向（$m-m'$）に関する2点相関が生じる．つまり，温度揺らぎは非等方なランダムガウス場で記述される．しかし，セルの大きさが無限大，すなわち $L \to \infty$ の極限では，$SO(3)$ の対称性が回復するので各 k における固有状態の縮退数が無限大になり，異なる角度スケールもしくは方向に関する2点相関は消滅する．

それでは等方な観測者のアンサンブルを考えたらどうであろうか？ 非等方な宇宙における我々の方向は偶然に決定されたものである，と考えることは自然であろう．そこですべての観測者の向きを同等に取り扱うと，今の3次元トーラスモデルの場合 a_{lm} の等方的な4点相関の連結成分は消えないことが分かる[9]．つまり，（等方な非ガウス的揺らぎ＝非等方なガウス的揺らぎ）が成立する．

閉双曲モデル[*9]の場合は ξ_{klm} が一様等方な観測者のアンサンブルに対しては近似的にガウス分布に従う「ランダム」な数と見なせるため，温度揺らぎの展開係数 a_{lm} は，ガウス的な揺らぎの振幅の積 $\Phi_k \xi_{klm}$ の和で書き表せることになる．したがって，揺らぎに寄与する独立なモードの数が小さい大角度スケールでの温度揺らぎはやはり非ガウス的になる．この場合 a_{lm} は歪度がゼロ，尖度が正の分布に従う．

もし，大角度の温度揺らぎに等方的な非ガウス性があり，小角度になるに従って揺らぎが漸近的にガウス的に振る舞うのであれば，宇宙の空間成分が非自明なトポロジーを持つ，つまり，宇宙が大域的に非一様非等方な幾何を持つ有力な証拠となり得る．

6. 終わりに

観測技術の飛躍的な進歩によって宇宙が閉じているか開いているか，といった素朴な疑問に対して，ついに科学的な回答が与えられる時代になった．2001年6月にNASAによって打ち上げられた人工衛星WMAPによる詳細なマイクロ波背景輻射の温度揺らぎのデータが2003年1月に公開された．ここ数年の観測結果は，ほぼ平坦な宇宙モデルを示唆しているが，WMAPのデータを用いて，宇宙の大きさと形に厳しい制限をつけることが可能になるだろう．

しかし，我々の宇宙における階層構造は量子揺らぎを種として形成された，と本当に言えるのだろうか？ マイクロ波背景輻射は「宇宙の晴れ上がり」時の情報を伝えるが，それ以前の宇宙の状態に関しては，直接的な情報を持たない．もし，初期宇宙において，効率的な量子揺らぎのカオス的な混合が起こったとすれば，その痕跡はマイクロ波ではなく，重力波の背景輻射として観測されるかもしれない．なぜなら，重力子は他の粒子とほとんど相互作用しないので，時空の激しい変動の情報をほとんどその当時のままの形で我々に伝えてくれるからである．2020年頃に打ち上げが予定されている宇宙重力波干渉計LISAがその痕跡を捕えるかもしれない．我々はまさに21世紀の宇宙論のパラダイム変革前夜を迎えているのである．

*9) すべての閉双曲空間は大域的に非一様非等方であることが知られている．

参考文献

1) J.R. Weeks, SnapPea *A Computer Program for Creating and Studying Hyperbolic 3-manifolds*, http://www.northnet.org/weeks.
2) J.R. Weeks, PhD doctral thesis, Priceton University (1985).
3) D.H. Coule, *Phys. Rev.* **D 62** (2000) 124010.
4) N.J. Cornish, D.N. Spergel and G.D. Starkman, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 215.
5) K.T. Inoue, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3071.
6) K.T. Inoue, *Phys. Rev.* **D 62** (2000) 103001.
7) K.T. Inoue, *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 629.
8) N.J. Cornish, D.N. Spergel and G.D. Starkman, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 2657.
9) K.T. Inoue, doctoral thesis, Kyoto University, (2001) astro-ph/0103158.

（いのうえ・かいき，近畿大学理工学部）

VII. ダークエネルギーからの展開

VII. ダークエネルギーからの展開

宇宙論の新展開

佐藤 勝彦

宇宙背景放射をはじめとする宇宙論的観測の急激な進展により，インフレーション理論を含むビッグバン理論は観測からの支持によって標準理論となった．しかし同時に，現在の宇宙を満たしているダークエネルギーの発見など新たな謎も生じてきた．本稿では，宇宙論研究の進展を歴史的に概観しつつ，21 世紀の宇宙像を探る．

1. はじめに

宇宙の空間的スケールが急激に広がり始めたのはハッブル（E.P. Hubble）による銀河の研究からであろう．1924 年，彼はアンドロメダ銀河が我々の住む天の川銀河の外にある，天の川銀河と同等な「銀河」であることを確認した．さらに 1929 年には遠方の銀河ほど我々から速い速度で遠ざかっているというハッブルの法則，つまり宇宙の膨張を発見した．これらにより我々の住んでいる宇宙は大きな極限では銀河が無数に広がった銀河宇宙であり，それが膨張を続けているということがわかったのである．ハッブルの発見は我々の住んでいる世界の描像を静的な永遠不変なものから，動的に進化するものへと革命的に変えてしまった．一方ロシアのフリードマン（A. Friedmann）は，1922 年，宇宙膨張の発見の 7 年前に，時空の物理法則，一般相対論の式を解くことによって，宇宙が実際膨張，収縮することを理論的に示した．物理学の法則，一般相対論によって宇宙膨張が予言され，それがハッブルによって証明されたことは，宇宙は論理だった単純な原理に従って運動しているという物理学的世界観を揺るぎのないものにした．1946 年，ガモフ（G. Gamov）はこの始まりに，当時最先端の科学であった「原子核物理学」を応用し，我々の宇宙は火の玉，ビッグバンとして始まったことを示したのである．ガモフは我々の宇宙を構成している元素の 70%以上がもっとも単純な元素，水素であり炭素や酸素より重い重元素が 1–2%であることを説明するには，宇宙は熱い火の玉として生まれなければならないことを示したのである．そして 1965 年，この火の玉の名残であるマイクロ波宇宙背景放射（3 K 放射）がペンジャス（A.A. Penzias）とウィルソン（R.W. Wilson）によって発見され，このビッグバン理論は揺るぎのないものとなったのである．ビッグバン理論は今日大筋において宇宙論的な観測ともよく一致し，科学的な宇宙論の標準となっている．

ビッグバン理論は，このように 3 K 放射の発見によって，標準理論となったが，しかし未解決な問題も残された．第一は次の節で議論するように“始まり”の問題である．宇宙膨張の解，フリードマンの解では宇宙は時空の特異点から始まる．特異点とは，時空の曲がりを表す曲率などの量が無限大になり，因果の関係を表す曲線がここから出発したり，終わってしまう点である．この特異点がある自然な条件の下では避けることができないと

いう「特異点定理」もS. ホーキング（S. Hawking）やR. ペンローズ（R. Penrose）によって証明されている．因果の曲線が出発する特異点から宇宙が始まることは，宇宙の出来事は特異点の彼方からの情報に依存することを意味する．物理学者としては，物理学の中で自己完結的に宇宙の創生から終焉まで記述できるという描像を持ちたい．このようなアカデミックな問題に加えて奇妙なことは，①宇宙は因果の関係を超えて極めて一様であること，②宇宙の曲率が極めてゼロに近いこと，つまり観測的に容易にゼロからのずれが測定できないほど平坦であるということ，そして③宇宙の大きな構造（銀河団，超銀河団など）の種は，因果の関係を超えて仕込まれたように見えることである．①は地平線問題と呼ばれている．地平線とは因果の関係を持つことのできる領域の大きさで，宇宙開闢の時刻にある地点を出発した光が到達できる距離である．宇宙開闢以来一度も因果関係を持つことのなかったところが，まったく同じ密度状態にあるということは奇妙である．②は平坦性問題と呼ばれている．宇宙膨張を記述する方程式，重力場の方程式は，時空の曲がりが少しでも正か，また負であるとその方向に急激に成長してしまう性質がある．現在の宇宙の曲率はゼロに近いが，曲率の値が観測的上限値内に収まるためには，宇宙創生の瞬間（仮にプランク時刻とする）には120桁の精度で初期密度を設定してやらなければならない．これは極めて不自然である．③の密度揺らぎの起源問題は，実際観測されている宇宙の大構造の種を初期宇宙で作ろうとしても，光速を超えるような速さで物質を運んでやらなければ凸凹を作れないという困難であり，アカデミックな問題を越えて具体的な困難である．

1980年頃から，宇宙論の研究は爆発的な進歩を始めた．それは当時大きく進歩した力の統一理論に基づいて，また刺激されて始まった宇宙初期の理論的研究である．統一理論に基づいて提唱されたインフレーション理論は①から③の問題を原理的には解決できることを示し，また引き続いてインフレーションの進展によって始まった量子宇宙論は，特異点なしの宇宙創生のモデルを示すことができた．現在この理論的研究の成果として我々は次のようなパラダイムを持っている．**1**. 我々の宇宙は時間も空間も物質もない“無”の状態から量子論的効果によって創生された．あるいは，“果てのない条件”から虚時間として始まった．**2**. 生まれた宇宙はまもなくインフレーションと呼ばれる急激な加速度的膨張を始めた．この急激な膨張により宇宙の曲率はその初期値の如何にかかわらずゼロに収束し，平坦となる．そしてインフレーションの終わる頃に開放された真空のエネルギーは熱エネルギーに転化し，火の玉宇宙が始まった．**3**. インフレーション中に量子論的揺らぎとして仕込まれた密度の凸凹は，宇宙が膨張冷却する過程で次第に成長し，現在の銀河や銀河団などの大構造をはじめとする多様で豊かな宇宙が形成された．現在の宇宙論の研究は基本的にはこのパラダイムの中で進められている（図1）．

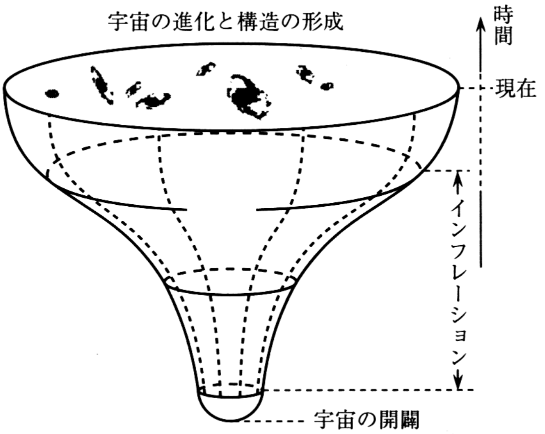


図1　現在の宇宙創生のパラダイム．時間も空間もない“無”の状態から生まれた量子宇宙は直ちにインフレーションを起こしマクロな宇宙となった．現在の宇宙を満たす物質エネルギーはインフレーションによって作られたものである．インフレーションによって仕込まれた密度揺らぎは成長し今日の銀河や銀河団などの構造を形成する．

2. 観測的宇宙論の進展

1992 年，アメリカの宇宙背景放射観測衛星，COBE は宇宙開闢から 30 万年しか経っていないころの宇宙の姿を描き出した．わずか 10 万分の 1 というマイクロ波電波の強弱であるが，描き出された宇宙構造の種は，インフレーション理論の予言する揺らぎの予言と一致したのである．もっとも標準的なインフレーション理論は，揺らぎの波長ごとの振幅の大きさを表すパワースペクトラムが波数 k の 1 次の冪に比例することを予言している．COBE 衛星によって観測されたパワースペクトラムの冪は，観測誤差内で 1 であったのである．これによってインフレーション理論は観測から大きな支持を受けることになったのである．

COBE の成果は，実は 1980 年代中頃から，爆発的に進み始めた観測的宇宙論の一つの成果である．宇宙では遠方を観測するということは過去を見ること，つまり宇宙の初期に近づくことである．しかし，遠方であるということはそれだけ観測が困難であり，以前の観測は誤差も大きく観測的に宇宙の初期を探ることはできなかったのである．しかし，CCD に代表される光電技術の急激な進歩，人工衛星による観測などにより，電磁波の全波長にわたる観測が可能になり，また計算機技術の進歩による大量データ処理が可能となったことなどにより，いまや宇宙論の研究は観測的宇宙論の時代になったのである．宇宙論の根幹に関わる発見のまず第 1 は，1970 年代から 1980 年代にかけて確かとなった暗黒物質（ダークマター）の存在である．その正体は謎のままであるが，その量は宇宙を平坦にする物質密度，すなわち臨界密度の 30%程度，$\Omega_{DM} \approx 0.3$ である．ここで Ω_{DM} は暗黒物質の密度を臨界密度で割ったもので，暗黒物質の密度パラメータである．ちなみに，我々の体をはじめ星などを作っている通常の物質，バリオンの量は，宇宙初期の元素合成の理論や，銀河団ガスなどの観測から，せいぜい $\Omega_B \approx 0.01$–0.02 程度と考えられており，暗黒物質の量に比べると 1 桁以上少ない．

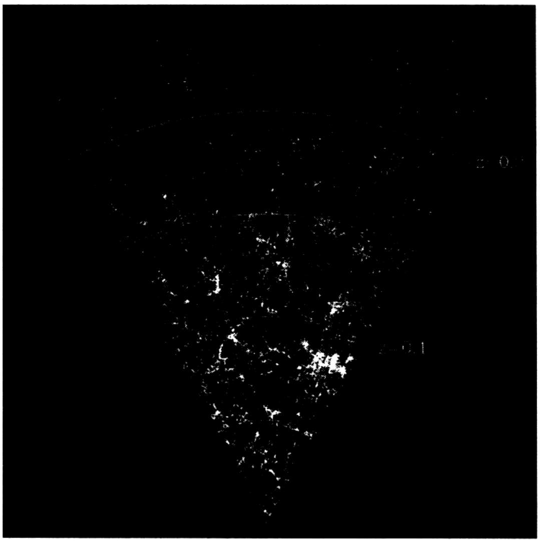


図 2　スローンデジタルスカイサーベイ（SDSS）の描き出した 25 億光年にわたる宇宙の地図．扇の要が我々の銀河系の位置．

第 2 の発見は，1980 年中頃の宇宙の大構造の発見である．銀河が群れを作り，銀河団や超銀河団を形成していることは，はるか前から知られていたが，それらが互いに繋がり，あたかも蜂の巣のセルのように連なっていることが，M. ゲラー（M. Geller）等のグループによって発見されたのである．しかも蜂の巣のセルの中は銀河の数が希薄な，空白領域，ボイドなのである．現在スローンデジタルスカイサーベイ（SDSS）による観測が順調に進み，ほぼ最初の段階は終わりつつある（図 2）．全天の約 1/4 の空を探査し従来より格段に暗い天体まで検出し，極めて遠方（25 億光年）まで宇宙の地図を作り上げた（http://skyserver.nao.ac.jp）．

宇宙論におけるもっとも重要なパラメータ，宇宙の膨張の速さを示すハッブル定数，H_0 の値も，この数年でほぼ 10%程度の誤差範囲で定まったのではないかと考えられるようになった[6]．ハッブル宇宙望遠鏡を長時間駆使し，ハッブル定数を誤差 10%の精度で決めようとする，W. フリードマン（W. Freedman）等のハッブルキープロジェクトの最終報告は $H_0 = 72 \pm 8\,\mathrm{km/s/Mpc}$ であることを示している．

近年のもっともインパクトの大きな宇宙論的観測は，現在の宇宙には真空のエネルギーが満ちており，それに働く斥力によって宇宙はいま加速度的膨張をしているという発見である．

米国の科学雑誌，サイエンスは毎年，その年の科学の十大発見を発表しているが，1988 年度の大発見のトップは，宇宙を加速度的に膨張させている“宇宙斥力の発見”であった．カリフォルニア大学，バークレイ校のパーミュッタ（Seul. Perlmutter）をリーダとする超新星宇宙論プロジェクトチームと，オーストラリア，マウントストローム天文台のシュミット（Braian P. Schmidt）をリーダとする高赤方偏移超新星探査チームが独立に真空のエネルギーの量は臨界密度の 70%，つまり $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ にもなることを示したのである．ここで Ω_Λ は真空のエネルギー密度を臨界密度で割ったもので，真空のエネルギーの密度パラメータである．

真空のエネルギーが存在しているということは，アインシュタインの宇宙定数が存在していることと数学的に同等で，関係式，$\Lambda = 8\pi G\rho_\nu/c^2$ で相互に書き直すことができる．ここで Λ は宇宙定数，ρ_ν は真空のエネルギー密度である．かつてアインシュタインは永遠不変な宇宙モデルを作るためにこの Λ を導入したものの，ハッブルによる宇宙膨張の発見によって，1929 年自らもはや不要であると捨て去った．もし観測が正しいならアインシュタインの宇宙定数は 70 年ぶりに復活したことになる（本別冊 VII 章，千葉氏の解説参照）．この“発見”は，一時インフレーション理論の危機と言われていた困難を一挙に解決するものである．インフレーション理論は宇宙が平坦であることを予言する．宇宙膨張の式から宇宙の曲率の符号，$k = +1, 0, -1$ は

$$\frac{k}{H_0^2} = \Omega - 1$$

によって決まる．ここで，Ω は宇宙の密度パラメータで，それぞれの密度パラメータの合計は

$$\Omega \equiv \Omega_B + \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda$$

である．

1990 年代初めの天文学的な観測は宇宙を平坦にするほど物質がこの宇宙に満ちておらず暗黒物質を，宇宙の膨張の速さが速すぎるため，空間の曲率は負になり（$k = -1$），永遠に膨張を続けることを示唆していた．しかし，超新星の観測から“発見”された真空のエネルギーを加えるとちょうどインフレーションの予言どおりの平坦な宇宙が実現できる．宇宙論的な観測には系統的な誤差や統計的な誤差がつきまとう．最新の観測の現状などの仔細は文献 6) の土井氏の解説を参照されたい．

近年，宇宙が極めて平坦でなければならないことが，宇宙背景放射の細かな揺らぎの観測から示された（文献 6) の杉山氏の解説参照）．2000 年 5 月，Boomerang チームと MAXIMA チームは独立に，気球を用いて COBE の観測より何十倍も細かな揺らぎの観測を行い，$\Omega = 0.9(+0.18, -0.16)$（MAXIMA，2001）という結果を示したのである．Ω がほぼ 1 で宇宙が平坦（$k = 0$）であるという結果は，まさにインフレーション理論の研究者が待ち望んでいたデータである．これと遠方の超新星による真空のエネルギー密度パラメータの観測と組み合わせるならば，Ω の中の配分も，$\Omega_\Lambda \approx 0.7$，$\Omega_B + \Omega_{DM} \approx 0.3$ と決まってしまうのである（図 3）．

このように 21 世紀初めに，宇宙論の基本的な

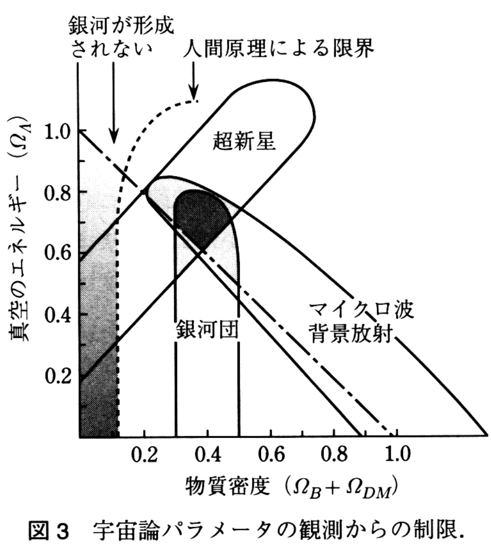


図 3 宇宙論パラメータの観測からの制限．

パラメータはほとんど決まってしまったように見える．しかもその結果はインフレーションを前提とするビッグバン理論と見事に一致するのである．しかし，それにもかかわらず，中身を見れば正体不明の暗黒物質や真空のエネルギーなど，根源的な謎が残されているのである．また宇宙創生の問題は，インフレーションと量子的創生という枠組みができあがったが，その根拠となっている統一理論は未完のままである．

3. 宇宙の創生とインフレーション理論

筆者やグース（A. Guth）の考えた当初のインフレーション理論は，当時盛んに研究されていた大統一理論，GUT（Grand Unified Theories）に基づいて考え出されたものである．この理論はワインバーグ（S. Weinberg）とサラム（A. Salam）の電磁力と弱い力の統一理論をさらに拡張し，強い力も含めて統一する理論である．宇宙開闢 10^{-36} 秒頃，宇宙の温度が 10^{15} GeV（$\mathrm{GeV} = 10^{9}$ eV）であった頃，真空の相転移が起こり，強い力が枝分かれを起こしたことをこの理論は予言している．ワインバーグ・サラムの統一理論や，大統一理論では真空の相転移とは，ヒグス場と呼ばれている素粒子の場の相転移である．相転移前の状態では真空のエネルギー密度は高い状態にあり，これに働く重力は斥力である．宇宙は指数関数的な急激な加速膨張をするようになり，ミクロな宇宙でも，一挙に何億光年ものマクロな宇宙になってしまう．インフレーションの持続する時間は，真空が不安定になったエネルギーの高い状態にどれだけ我慢して止まることができるかによって決まるわけである．しかも真空のエネルギーの密度は，宇宙が急膨張しても，まったく変化しない．つまり，宇宙の体積が100桁大きくなったとしたならば，その中の真空のエネルギーの総量も100桁大きくなるのである．相転移が最終的に起こると，真空のエネルギーは潜熱として開放され，通常の物質エネルギーに転化する．このシナリオはエネルギー保存則を満たす重力場の方程式やヒグス場の方程式を解くことで導かれているのではあるが，見かけ上，無からエネルギーを生み出すメカニズムとなっている．今日，宇宙を満たしている物質エネルギーはすべて，インフレーションが作り出したものである．これがインフレーション理論の真髄である．

しかし，もともとのインフレーション理論は，問題があった．パラメータの値によっては相転移が完了しなくなる，また相転移終了後の宇宙の凸凹の度合いが強すぎることなどである．銀河団やグレートウォールをはじめとした宇宙の構造を作るための種として，凸凹を仕込んでやる必要があるが，これでは揺らぎの振幅が大きすぎ，成長して宇宙はブラックホールだらけになってしまう．最初の改良版として新インフレーションモデルがリンデ（A. Linde）やスタインハート（P. Steinhardt）などによって提案された．しかしそれにも問題が残されていたことから，カオティックインフレーション，ハイブリッドインフレーション，拡張インフレーションモデル，超拡張インフレーションモデル，ソフトインフレーション，ナチュラルインフレーション，オープンインフレーションと数え切れないほどのモデルが今日までに提案されている．このような，いろいろなインフレーションのモデルが提案される中で，力の統一理論に基づいてインフレーションモデルを作り上げる精神は失われてしまいインフレーションを引き起こす場は“インフラトン場”と呼ばれている．もちろん新たな力の統一理論，超重力理論や超紐理論などから導く努力も進められていることは言うまでもない（本別冊VI章，横山氏の解説参照）．

量子論的宇宙創生の近年の話題は，多次元宇宙の創生である．超紐理論の進展やその刺激を受けて，多様なアプローチが進められている．従来の多次元宇宙モデルでは，時空となる4次元を除いた残りの次元，内部空間はプランクスケールの大きさに縮まっている．つまりコンパクト化されていると考えていた．一方，3次元空間となる方向には宇宙は膨張しなければならない．このような宇宙モデルはカルツァ・クライン宇宙モデルと呼ば

れているが，このもっとも単純なものは，真空のエネルギーに満ちた多次元宇宙である．すでに内部空間が収縮，もしくは創生時のままの大きさを保ち，外部空間がインフレーションを起こすモデルにつながるインスタントン解（虚時間での古典解）などが求められている．また，このような WKB 近似ではなく直接，時空の運動を記述するシュレディンガー方程式であるウィーラ・ドウィット方程式を解き，宇宙の波動関数の振舞いを調べることも行われている．これらの解析は内部空間も外部空間も共に大きくなるインスタントンの寄与がもっとも大きいことを示している．内部空間を小さく保ち，外部空間でインフレーションを起こすためには，どうしても内部空間と外部空間で圧力などが非対称な物質場を考えざるを得ない．

近年の新たな，もっとも興味深い宇宙のモデルはブレーン宇宙モデルである（文献 6, 7）の白水氏の解説参照）．究極の統一理論となりうる超紐理論として考えられている M 理論の示唆するところでは，高次元の空間の中に，3 次元の膜が存在し，それが我々の住む宇宙である．物質はこの膜内に閉じ込められていると考えるので，この膜に垂直な方向は決してコンパクト化される必要はない．ランダール（L. Randall）とサンドラム（R. Sundrum）は 5 次元 Anti–deSitter 中に，3 次元の空間の膜があるモデルを用いて，5 次元的な重力がこの膜内では，ニュートン的 4 次元重力則となるモデルを示した．特にブレーンが正の表面張力を持つモデルは，多くの研究者によって調べられ，ブレーン内での重力則が確かにニュートン則となることが示されている．またそのブレーン宇宙の宇宙膨張の式，

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -\frac{1}{R^2} + \frac{8\pi G\rho}{3} + \lambda^2\left(\frac{4\pi G\rho}{3}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{R^4}$$

は通常の膨張の式に，2 つの付加項（右辺の最後の 2 つの項）が加わったものである．ここで $\lambda = \sqrt{-\frac{6}{\Lambda}}$ は 5 次元 Anti–deSitter 時空の特徴的長さ，α^2 は質点の質量である．これらの項は物質密度が小さくなり，スケール項が大きくなった時点では，寄与は小さく無視できるが，宇宙初期には効果を現し，宇宙が単なるフリードマン宇宙ではなく，ブレーンの世界であることを示すものである．

スタインハートとツロック（N. Turok）はこの 2 枚が衝突することがビッグバンに対応するのではないかと考え，エキピロティック宇宙モデル（Ekypyrotic Universe Model）というモデルを提唱している（本別冊 V 章，山口氏の解説参照）．彼らはこの衝突は 1 回ではなく無限に続くのではないかと考えたのである．我々の宇宙に対応するブレーンがまず別のブレーンと衝突し，ビッグバンが起こる．宇宙はビッグバン後，通常の減速的膨張の後，わずかに残存している真空のエネルギーによって加速度的な膨張を起こす．しかしやがて真空のエネルギーも小さくなり収縮に転じ再度 2 枚の膜は衝突を起こしビッグバンを起こす．つまりこのモデルは宇宙は膨張収縮を繰り返す振動宇宙モデルで，時間に始まりもなければ終わりもない（図 4）．

現在ブレーン宇宙モデルは，多くの研究者の興味を引きつけ，大きく進展しつつある．

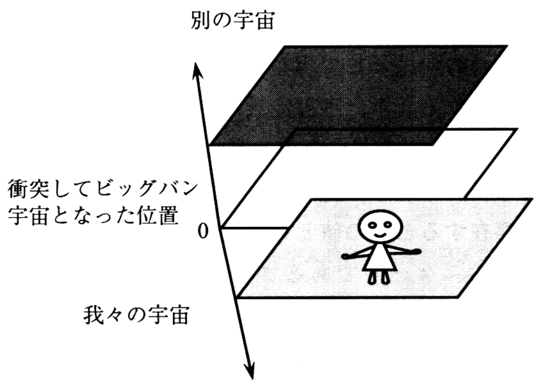


図 4　エキピロティック宇宙モデル．高次元空間中の 3 次元の次元を持つ 2 枚のブレーンが衝突を繰り返す．衝突の瞬間がビッグバン．このうちの 1 枚が我々の宇宙である．衝突の瞬間がビッグバンに対応する．宇宙はビッグバン後，通常の減速的膨張の後，加速度的な膨張を起こす．しかしやがて収縮に転じ再度 2 枚の膜は衝突を起こしビッグバンを起こす．このモデルは宇宙は膨張収縮を繰り返す振動宇宙モデルで，時間に始まりもなければ終わりもない．

4. ダークエネルギー（暗黒エネルギー）

遠方の超新星の観測や気球を用いた背景放射の観測から得られた，真空のエネルギー密度パラメータの値は $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ であり，暗黒物質や通常の物質密度の合計，$\Omega_B + \Omega_{DM} \approx 0.3$ を超えている．これは再び真空のエネルギーが宇宙の主なエネルギーとなり，宇宙は急激な膨張，“第２のインフレーション”を始めたことを意味する．この真空のエネルギーの正体はいったい何なのだろうか？正体不明の物質をダークマター（暗黒物質）と呼ぶのに対応して，この正体不明の真空のエネルギーをダークエネルギー（暗黒エネルギー）と呼ぶようになった．謎はその正体だけではない．なぜ我々は第２のインフレーションが始まったという宇宙の歴史の特別な時期に生きているのか？ 偶然そのようなことが起こる確率は極めて小さい．そこには何らかの必然性があるはずである．この疑問は偶然一致問題（coincidence problem）と呼ばれる．本来何の関係もない量である両者の値は50桁，100桁違っていてもそのほうが自然なのである．

物理学法則の必然的帰結として，例えば量子重力理論の帰結として現在の真空のエネルギー密度が導かれるなら，宇宙定数はもはや物理定数であり，“なぜこのような値を持つのか”という疑問は宇宙論の疑問ではなくなる．真空のエネルギーが存在するとその値として自然な値は，量子重力理論のスケールであるプランクエネルギー密度 $G^{-2} \approx (10^{19}\,\mathrm{GeV})^4$ である．ここで G は重力定数である．しかし現在の真空のエネルギー密度はプランクエネルギー密度の 10^{-120} である．

このような120桁の違いを，現在の物理学の範囲で人為的操作なしに自然に導くのはほとんど不可能であろう．この疑問は小ささの問題（smallness problem）と呼ばれている．しかし，ともかく宇宙時刻で言えば最近始まった第２のインフレーションは永遠に続くものなのだろうか？ 未完ではあるが力の統一理論の大筋を信じるなら，宇宙の真空の相転移に従って，真空のエネルギー密度は，プランクエネルギー密度から，大統一理論のスケールへ，また電弱力のスケールへ，そして強い力のスケールへと，階段状に下がってきたはずである．クォーク・ハドロン相転移以後真空のエネルギーはゼロとならずに現在の値となって落ち着いたのだろうか？ それとも滑らかに変化しながら今日に至っているのだろうか？ 前者の場合，再度何兆年後に真空の相転移が起こり第２のインフレーションは終了するのだろうか？ しかし，わずかながらも再度真空のエネルギーが残され，第３のインフレーションが始まるのだろうか？

真空のエネルギーが，宇宙初期から緩やかに減衰して今日の値になっているというモデルも提唱されている．減衰していく真空のエネルギーに，quintessence，つまり第５の元素という名前がつけられて研究が進められている．しかし，いまの時刻で，真空のエネルギーが物質のエネルギーを上回るようになり始めたのかを本質的に説明できるものではない．もちろん，適当な減衰モデルを作り，モデル内の減衰速度に対応するパラメータを微細調整し，人為的にいまの時刻に合わせることはできるが，それでは偶然一致問題を解いたことにはならない．しかしこのような現象論的モデルでまずアプローチすることは研究の第一歩である．しかし個人的には，偶然一致問題は，人間原理的解決しかないのではないかと考えている．現在観測されている真空のエネルギー密度をはるかに超えるような値を持つ“宇宙”では，早い時期に第２のインフレーションが始まり宇宙構造は形成されず知的生命体も生まれない．知的生命体が生まれるのは現在の値程度の真空のエネルギー密度，もしくはそれ以下の値を持つ宇宙のみである．

5. 終わりに

宇宙論研究はいま２つの方向で進んでいる．第一は最近しばしば言われる精密宇宙論の方向である．20世紀末に宇宙論パラメータの基本的値はほぼ決まり，21世紀の課題はこれを精度よく決め，か

つインフレーションを含むビッグバン宇宙論を基に，宇宙進化の描像を明確に描き出すことである．

2003年に打ち上げられたWMAP（ウィルキンソン・マイクロ波異方性探査機）は，宇宙のダークマターの量，ダークエネルギーの量を求めることに成功した．その値は従来の値とほぼ一致している．宇宙の年齢も137億年と求められた．さらに，今年ESA (欧州宇宙機関) によってPLANCKが打ち上げられた．偏光観測などにより，詳しいデータが得られるものと期待される．現在，すばる望遠鏡をはじめとする10mクラスの巨大望遠鏡が世界で10台以上稼動する時代となっている．今年，宇宙赤外線望遠鏡ハーシェルがESAによって打ち上げられた．さらに，ハッブル望遠鏡の後継宇宙望遠鏡，ジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡 (JWST) も準備中である．X線天文衛星，CHANDRA, NEWTONをはじめとして宇宙空間から全波長での観測が進んでいる．宇宙論は，いまはっきりと，"論" から天文学となったのである．21世紀前半には，観測によって豊かな宇宙進化の描像が天文学として描き出されるであろう．21世紀末には，COBEが宇宙開闢30万年頃の宇宙の地図を描いたように，重力波によってインフレーションの起こった頃の地図が描かれると夢見ることもできる．

しかし，同時に期待したいことは，従来の理論に矛盾，もしくはそれまでの理論では説明することのできない観測が出てくることである．知の世界の体積が膨らめば当然それだけ，その表面，フロンティアも広がるのは当然である．実際，ダークマター，ダークエネルギーの問題は大きな謎である．我々は，我々の住んでいるこの宇宙を構成する物質の99%が何であるかをまったく知らない．第2の方向はこの謎へのチャレンジである．ダークマターの候補としては超対称理論が予言するニュートラリーノをはじめとして各種の素粒子が考えられている．その直接検出を目指す実験も行われている．もうすぐ再稼動する予定のLHCによって何らかの示唆が得られることを期待したい．一方ダークエネルギーの存在の "発見" はそれが正しいならば，宇宙論的意義以上に物理学の根幹にふれる発見である．

科学は矛盾や謎を解くことによって進む．これらの謎は21世紀宇宙論への鍵である．

参考文献

1) E. Kolb and M. Turner, The Early Universe, Addison Wesley, 1990; J.A. Peacock, Cosmological Physics, Cambridge Univ. Press (1999).
2) D. Lyth et al, *Phys. Rep.* **314**, 1 (1999); 数理科学, 素粒子的宇宙論特集 1991年7月号; 田中貴浩, 日本物理学会誌, **55**, 932 (2000); 佐藤勝彦：数理科学, No.442, 33 (2000), No.451, 19 (2001).
3) S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1 (1989); V. Sahni et al, Astro-ph/9904398; 佐藤勝彦 日本物理学会誌, **51**, 347 (1996); 日経サイエンス, 宇宙論特集, 1999年4月号.
4) 日経サイエンス, 宇宙論特集, 2001年4月号.
5) 日経サイエンス別冊『宇宙論の新次元』, 日経サイエンス社, 2001年11月.
6) 数理科学, 素粒子論的宇宙論の新展開 特集 2003年2月号.
7) シリーズ 現代の天文学, 第2巻,『宇宙論 I—宇宙のはじまり』, 佐藤勝彦・二間瀬敏史編, 2008年.

（さとう・かつひこ，東京大学数物連携宇宙研究機構，明星大学理工学部）

VII. ダークエネルギーからの展開

宇宙の真空

変動する真空

佐藤　文隆

1. ある演習問題

調和振動子の振動数がある時点，$t=0$，で ω_1 から ω_2 にポンと変化したとする．すなわち

$$
\begin{aligned}
t<0 \text{ に対し } \quad & \frac{d^2\psi}{dt^2}+\omega_1^2\psi=0, \\
t>0 \text{ に対し } \quad & \frac{d^2\psi}{dt^2}+\omega_2^2\psi=0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

この問題を量子力学ではどう解くのだろう？

こういうときには物理の定石の問題に置き換えてみるのがいい．自由粒子のシュレーディンガー方程式は

$$
-\frac{1}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi=E\psi \tag{2}
$$

であるが，ここで

$$
\begin{aligned}
& x<0 \text{ に対し，} V(x)=0, \\
& x>0 \text{ に対し，} V(x)=V_0
\end{aligned}
$$

であるとする．

ここで，$x\to t$，その他の置き換えをすれば，これは何れも単振動の式である．そして，ポテンシャル V の変化は，振動数の変化を引き起こしたものと，対応してみることができる．

式 (2) は図 1 のようなポテンシャルでの波動関数を計算する問題になる．いま，x の負の方向（すなわち t の負の方向）からの入射波を考えると，一部は通過し，残りは反射される．

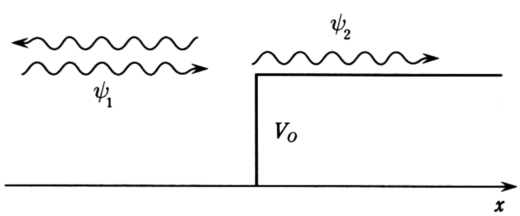


図 1　ポテンシャルによる反射．

時間の「過去の方向への反射波」などはイメージに浮かばないと言う人があろう．そういう人は x で答えまで計算した後で，$x\to t$ とするのが一計である．また，式 (1) では ψ は変位なのに，式 (2) では波動関数，すなわち状態ベクトルである．物理的には「混同してはいけないぞ！！」と注意することも，数式の答えを出す際には積極的にクロスオーバーするほうがいい．数式にあまりイメージを引っ付けない，別の言い方をすれば，一つの式に多くの物理的に違ったイメージを引っ付ける修行をすることが大事だろう．一つの数式に一つの物理イメージでは数式で書く値打ちがない．数理科学の醍醐味はこの混同を上手にやることである．

2.「過去」への反射波

説教はやめて本題に戻れば，「過去」から「未来」に向かう入射波が，ポテンシャルで反射波と侵入

波に分かれる．反射波は「過去」に向かい，侵入波は「未来」に向かう．定石にしたがって

$$t<0 \text{ に対し}, \psi_1 = Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t},$$
$$t>0 \text{ に対し}, \psi_2 = Ce^{i\omega_2 t}.$$

そして，接続条件から次の関係を得る．

$$\frac{B}{A} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \frac{C}{A} = \frac{2\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}.$$

次に振動子の変位 ψ_1 の正振動数固有関数を $f = e^{i\omega_1 t}$，負振動数固有関数を $f^* = e^{-i\omega_1 t}$ とし，同様に ψ_2 の正振動数固有関数を $g = e^{i\omega_2 t}$，負振動数固有関数を $g^* = e^{-i\omega_2 t}$ と書く．すると上のような接続条件から，これら固有関数は次のように結ばれていることが分かる．

$$\begin{pmatrix} g \\ g^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{C} & \frac{B}{C} \\ \frac{B}{C} & \frac{A}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

$(A/C)^2 - (B/C)^2 = 1$ である．

3. フォック表示と真空

今度は振動子の変位 ψ を量子力学で扱う．それには生成，消滅演算子を，ψ_1 に対し $a, a^\dagger$, ψ_2 に対し $b, b^\dagger$，と導入して，変位オペレーター ψ を次のように書く．

$$\psi_1 = af + a^\dagger f^*,$$
$$\psi_2 = bg + b^\dagger g^*.$$

すると上式 (3) から，生成，消滅演算子間の変換則，ボゴリボフ変換を，次のように得る．

$$(a, a^\dagger) = (b, b^\dagger) \begin{pmatrix} \frac{A}{C} & \frac{B}{C} \\ \frac{B}{C} & \frac{A}{C} \end{pmatrix}.$$

調和振動子のエネルギーは

$$H_1 = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\omega_1,$$
$$H_2 = \left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right)\omega_2.$$

いま H_1 の真空 $|0\rangle_1$，すなわち

$$a|0\rangle_1 = 0$$

なる状態をとれば

$${}_1\langle 0|H_1|0\rangle_1 = \frac{1}{2}\omega_1$$

という真空エネルギーを与える．同様に，いま H_2 の真空，すなわち

$$b|0\rangle_2 = 0$$

なる状態をとれば

$${}_2\langle 0|H_2|0\rangle_2 = \frac{1}{2}\omega_2$$

となる．

ところがいま H_1 の真空で H_2 のエネルギーを推定すると，

$${}_1\langle 0|b^\dagger b|0\rangle_1 = \left|\frac{B}{C}\right|^2$$

だから，

$${}_1\langle 0|H_2|0\rangle_1 = \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4\omega_1^2} + \frac{1}{2}\right]\omega_2. \qquad (4)$$

4. 解釈：その 1　熱的励起

ジャラジャラと数式が出てきたがこれらは何を意味するのだろう．また「お前の任務は“宇宙の真空”だぞ」という注文にどう関係するのだろう．

まず先の「問題」の結果で分かるのは，H_1 の真空と H_2 の真空は違うことである．振動数をポンと変動させたら，量子力学的には同じ状態が真空ではなくなったことである．ここでの「真空」の意味は最低エネルギー状態の意味であったから，振動数をポンと変化させたらその状態は新しい真空から見れば「励起」された状態にあると表現してもいい．

フォック表示での調和振動子の固有状態は

$$H_2|n\rangle_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_2|n\rangle_2$$

のような励起エネルギーを与える．こういう視点から言うと式 (4) の励起はフォック表示の固有状

態の励起ではない．いろいろなフォック固有状態の混じった励起なのである．

混じり方は次のように求まる．混じり方の分布関数を $F(n,\alpha)$ とおけば，規格化条件より

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n,\alpha) = 1.$$

頭ごなしだがいま $F(n,\alpha) = Ae^{-\alpha n}$ と書けば

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n,\alpha) = A\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = A\frac{1}{1-e^{-\alpha}} = 1.$$

したがって，これから $A = 1 - e^{-\alpha}$ と決まって

$$F(n,\alpha) = (1-e^{-\alpha})e^{-\alpha n}.$$

一方，$\partial F/\partial\alpha$ を計算した関係を使えば

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} n(1-e^{-\alpha})e^{-\alpha n}\\ &= e^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial F(n,\alpha)}{\partial\alpha}\\ &= e^{-\alpha}\frac{1}{1-e^{-\alpha}} = \frac{1}{e^{\alpha}-1}.\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial F(n,\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} F(n,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}1 = 0$$

を用いた．

「問題」の励起エネルギー (4) 式は

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_2 F(n,\alpha)\\ &= \left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2\omega_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\omega_2\end{aligned}$$

となるべきものである．ここで上の関係を用いれば

$$\alpha = \ln\left[\left(\frac{2\omega_1}{\omega_1-\omega_2}\right)^2 + 1\right].$$

ここで $\alpha = \omega_2\beta = \omega_2/kT$ というように「温度」T を導入すれば，頭ごなしの分布はボルツマン因子と解釈され，この分布は熱平衡の統計分布となる．そして温度は

$$kT = \frac{\omega_2}{\ln\left[\left(\frac{2\omega_1}{\omega_1-\omega_2}\right)^2 + 1\right]}$$

である．確かに振動数の変化がないなら $\omega_1 = \omega_2$ だから，上式の分母は発散して $T = 0$，すなわち励起はなかったとなって辻褄が合う．また $\omega_2 \gg \omega_1$ なら，温度は高温，$kT \gg \omega_2$，となる．

5. 解釈：その2　量子場の理論

場 $\Psi(t,x)$ の空間変数の部分をフーリエ成分で書いて

$$\Psi(t,x) \sim \sum_k e^{ikx}\psi_k(t). \tag{5}$$

時間変動だけの場の波数 k 成分 ψ_k を扱えば，自由場の運動方程式は

$$\frac{d^2\psi_k}{dt^2} + \omega_k(t)^2\psi_k = 0 \tag{6}$$

のように各 k 成分毎に独立した式になる．だから場を扱うとは数多くの調和振動子を扱うに過ぎない．しかも，互いに独立だから全く先の「問題」で解けている．運動方程式 (6) が単純な波動方程式でないのは $\omega(t)$ が時間依存でもいいことである．

「問題」で扱った変化は「非断熱的」な変化である．振り子の糸の長さ l を静かに（断熱的に）変えていく際には，$E(t)/\omega(t) =$ 一定 になるという断熱不変量がある．この場合は「励起」は起こらない．この近似が成り立つのは

$$\left|\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\dot{l}}{l}\right| \ll \omega.$$

ここで $\omega = \sqrt{g/l(t)}$ である．断熱的とは新しい波を立てずにしずしずとパラメータを変えることであった．

以上のレッスンで学んだことは，次のことである．振動子の周期に較べて短い時間で速く変化すると，「励起」が起こり，その逆に周期に較べて長い時間でのろく変化すると「断熱的」で「励起」は起こらない．「ポンと変化した」のは「速い」の極

端な例である．ポテンシャル中の波動で考えれば，ポテンシャルが波長に較べてなだらかな反射波の振幅が小さくなって「断熱」に近づくのである．

膨張宇宙というのは時空という外場が変化している器である．そのため，その中の場にこの外場がカップルする．最低必要な要素で議論を進めれば，時空の線素は

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2.$$

場の方程式は

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{1}{a(t)^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - m^2 \Psi = 0.$$

式 (5) のような波数成分を導入すれば

$$\omega^2 = \frac{k^2}{a(t)^2} + m^2$$

とおいて

$$\frac{d^2\psi_k}{dt^2} + \omega(t)^2 \psi_k = 0.$$

これはいま論じている「問題」の一種である．

宿題の「宇宙の真空」での一つのテーマはこのように，変動する時空外場での物質場の振舞いである．外場は古典場として扱われている．

さて，この変動が「急激」か「断熱的」かが次の問題である．ω の時間変化は

$$\left|\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right| = H\frac{k^2/a^2}{m^2 + k^2/a^2}.$$

ここで $H = \dot{a}/a$ はハッブル係数である．

例えば光の場なら $m = 0$．したがって断熱的とは

$$H \ll \omega.$$

膨張宇宙の現在では $H \sim (100\,\text{億年})^{-1}$ である．したがっていくら低周波の電波でも $H/\omega < 10^{-20}$ である．すなわち断熱変化である．ビッグバン宇宙の初期ではエネルギー密度 ρ は放射優勢である．宇宙膨張の時間スケールは

$$\frac{\dot{a}}{a} \sim \sqrt{G\rho} \sim \frac{T^2}{T_{Pl}}.$$

ここで T_{Pl} はプランクエネルギー，$h = c = 1$．一方，この放射の振動数は $\omega \sim T$ だから，断熱変化の条件は

$$\frac{\dot{a}}{a} \ll \omega \quad \text{すなわち} \quad T \ll T_{Pl}.$$

すなわち，重力が古典的に扱えるような場合は十分断熱的である．

断熱的なら，「励起」されたりせず，量子状態（例えば 1 個光子がある状態）は変わらずに，エネルギーが $\omega = k/a(t)$ のように減少する．（膨張宇宙では $a(t)$ は時間とともに増加するから）これが赤方偏移である．

6.「励起」の例：インフレーションと初期条件

それでは非断熱的に波動方程式のパラメータが変動するようなことが膨張宇宙であるのだろうか？ここで現在の素粒子統一理論でのヒッグス場に支配された真空の相転移を導入すると，非断熱的変化があり得る．次のように質量項が時間変化するとするのである．

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\varphi(t)^2\psi = 0.$$

$\varphi(t)$ 自身の変化はまた別のヒッグス場とのカップリングで決まる．そのようにして

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \ll \sqrt{g}\varphi$$

のような条件を満たせば，「励起」が起こる．

現在観測されている 2.7 K の CMB（宇宙マイクロ波背景放射）がこのようにして形成されたと考えられる．しかし実際にこれが起こる状況はいくつものスカラー場の組の連係プレーが必要である．

ψ 粒子に質量を持たすヒッグス場 φ の変動がなぜ起こるのかが問題である．この原因を φ 自体のダイナミクスと特殊な初期条件に押し付けて解決しようとするのがインフレーション理論であると言える．後述するような膨張宇宙での φ のダイナミクスを決める運動方程式は

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'_{\varphi}(\varphi) = 0$$

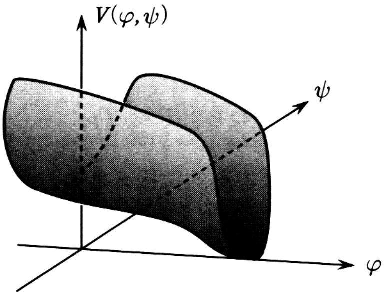


図 2　スカラー場のエネルギー関数 $V(\varphi,\psi)$.

となる．ただし $V'_\phi = dV_\phi/d\phi$．ここで V_φ は場の自己相互作用である．これがないとダイナミクスの動因がないように思える．運動方程式には初期条件が必要である．初期条件の φ と $\dot{\varphi}$ を与えなければ実際の変動は決まらない．例えば，$V_\varphi = 0$ なら「速度」$\dot{\varphi} = 0$ では何も起こらない．$V_\varphi \neq 0$ なら $\dot{\varphi} = 0$ であっても「変動」が起こる．($3H\dot{\varphi}$ の項は断熱変化しか生まない) 象徴的に言うと図 2 のようである．

「結果」をもたらすように初期条件を選ぶのであれば，「結果」=「原因」であって何も説明したことにならない．「原因」を別の場所に移しただけである．ところが「初期条件 $\dot{\varphi} = 0$ でも起こる」と言えば何か「原因」を説明した気分になるから奇妙である．「ポテンシャルの上に物を置けば下に落ちてくる」という説明で騙されてしまう傾向がある．だから位相空間 $(\varphi,\dot{\varphi})$ での初期条件の領域という問題を考えるべきだという論文を筆者等も過去に書いたことがある (Belinsky *et al*, *Prog. Theor. Phys.* **79** (1988), 676)．すると次に領域を指定する初期の量子状態は何かとなる．しかしそういう議論をいくらさかのぼってやっても所詮は「手で入れる」ものである．このことを突き詰めたのが「境界条件のない境界条件」(Hartle–Hawking) である．

デスクトップの問題と違って宇宙 (自然存在) を論じるときの初期条件問題にはややこしい情感的狭雑物が介入する．ニュートンが運動方程式と重力理論で太陽系の懸案を「説明」した気分になっているときに，「なぜ，太陽系がこの構造」かと問われれば「初期条件は神の一撃」と言わざるを得なかった．いまでは「宇宙」は太陽系から膨張宇宙に変わったが問題の本質は全く変わっていない．要するに問題をどこに移していくか，どの棚に上げておくかである．「棚」の種類は初期の宇宙の波動関数の変数に何を含めるか，例えば重力変数を含めるかどうか，といったことで決まる．弦理論は重力と物質場を同じ立場で論ずるから一緒に入れるべきであろう．しかし問題はまだ途半ばでありこの宇宙の波動関数を決める原理が必要である．追い詰められたニュートンの心境は現在でも理解できる．

7. 上げ底真空

初期条件の問題は深刻すぎてこれ以上抽象的に考えても意味がないであろう．大事なのはあれこれのもっともらしい「説明」もどこかに「棚」上げしたに過ぎないという認識である．この流れで言うと「真空」にはもう一つ重要な形而上学の問題がある．

我々はしばしば「何もない」真空を想定するが，「何もない」と言うには全てを知っていなければならない．しからば「全てを知った」という証明が可能かと言えば論理上不可能だし，それ以上に現実的に不可能である．だから，我々の真空とは既知のあれこれを取り除いた残りの状態である．何があるか知ったことではない．そういう「引き算」的操作で定義可能な概念である．この話は拙著『いまさら宇宙論』(丸善) でしつこくやったのでこれぐらいにしておく．この発想で現実に考えていくとどうなるかを少し展開してみる．

これまで場の量子論の真空とは「ある場」あるいは「ある素粒子」の最低エネルギー状態とみなしてきた．このことは固体物理でのフォノンなどの素励起子の見方でもそうである．この場合は誰も素励起の基底状態が「物質が何もない」意味での真空とは混同しない．フォノンなら真空とは格子振動が起こっていない状態である．固体という

物があってのうえでのある特殊な「状態」のことである．素励起がない「真空」は「上げ底」の底にすぎない．素励起のエネルギーはこの「上げ底」からの差額である．

ところが素粒子の素励起の場合は「真空」とは「物質が何もない」真空なのであろうか．この問いは，もし「真空」状態にある「もの」の状態が不変であれば，答えがどっちでもいい．問うだけ野暮な質問である．見ているのは「上げ底」から上だけであって，議論もそこに範囲が限定されている．だから，この「上げ底真空」がどれだけあるのか？ などを勘ぐるのは進物した人に失礼であり野暮である．もともと本当の「真の底」があるのかどうか？ を問う必要もないのだし，「必要ないこと」を問うのは野暮である．

「問い」が野暮でなくなるのは次の場合である．一つは上げ底が変化する場合である．ただしこの場合でも「真の底」に言及する必要はない．相対的な変動で十分である．もう一つ必要になる場面は「上げ底」のエネルギーがどう重力に寄与するかが問題になる場合である．第一の「上げ底」の変化は素粒子標準理論で組み込まれた対称性の自発的破れで，現在の真空をゲージ対称性の破れた状態という見解をとる．この場合で「破れた状態」しかないなら不変だが，ビッグバン宇宙の初期に真空相転移があっていまの真空が実現したと考えると，「上げ底」の転移が現実の過程になる．

第二の重力に寄与する「上げ底」の厚さが問題になるのは膨張宇宙論においてである．状態のフォック表示では各自由度当たり $\hbar\omega/2$ の真空エネルギーがある．一方，運動量の自由度は無限個あるから真空エネルギーは無限大となる．これが有名な発散の困難であり，素粒子論はその後この点を巡って繰り込み可能な力の場としてゲージ理論へと進展した．しかしここでも重力へ寄与する量を推定できる理論はできていない．超弦理論がそれを目指しており，繰り込み可能な重力の量子論はできそうである．

しかし，膨張宇宙のダイナミクスに効く真空のエネルギーの解決は直ぐには訪れそうにない．相互作用系の真空エネルギーへの補正は発散はしないようにはなっても有限の大きさがある．QED の完成時に役目を果たしたラムシフトのようなものである．弦理論の路線でこれをやれば詳細は何れであってもエネルギー密度の補正値が

$$V \sim \frac{m_{Pl}}{l_{Pl}^3}$$

のオーダーになると考えられる．ここで m_{Pl} や l_{Pl} はプランク質量やプランク長さである．

8. 膨張宇宙のダイナミクスと宇宙項

ところで膨張宇宙のダイナミクスは 4 次元時空の線素を次のように書いて

$$ds^2 = -N^2dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_\phi(\phi)\right],$$
$$2\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{\phi}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2}$$
$$= -8\pi G\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V_\phi(\phi)\right].$$

ここで，$\phi(t)$ 場は空間的に一様な真空場である．「真空」とは量子的な励起の最低状態の意味である．実際はこれら真空場はスカラー場の他成分の組であろう．$\phi(t)$ の変動は断熱的なもので励起なしの真空だけを扱っている．エネルギーが何から来たかと言えばボーズ凝縮している存在が自己相互作用エネルギー $V_\phi(\phi)$ である．

上記の膨張方程式の右辺は

$$\dot{\phi}^2 = \rho + P, \quad V_\phi = (\rho - P)/2$$

という置き換えをすれば，密度 ρ，圧力 P の流体のエネルギー運動量テンソルに相当する．さらに $\dot{\phi}^2 \ll V_\phi$ だから，

$$\rho = V_\phi, \quad P = -V_\phi$$

となる．

圧力が負という変な物質は重力作用を斥力で受

ける．このため，かつてアインシュタインが通常の物質の重力の引力を帳消しして静的な宇宙モデルを作るために導入した（1917年）宇宙項はこの真空エネルギーにあたる．アインシュタインは後に膨張宇宙の天文学での発見（1929年）があったので，宇宙項は必要ないとした．その後，1970年前後，ゼルドビッチがヒッグス場を組み込んだワインバーグ・サラム理論が提案されたことを受けて宇宙項は真空エネルギーにあたることを指摘した．しかし，定量的には全く合わない．宇宙項 Λ は大きさがある値以下に制限されているから，

$$\Lambda \sim \frac{1}{H^2} \sim \left(\frac{1}{10^{10}y}\right)^2.$$

ところが $G(m_{Pl}/l_{Pl}^3) \sim l_{Pl}^{-2}$ だから，

$$\frac{\Lambda}{GV_\phi} \sim \left(\frac{10^{-33}\mathrm{cm}}{10^{28}\mathrm{cm}}\right)^2 \sim 10^{-122}$$

となり，合わないにも程があるほど合わない．

この解決には全ての物質場全体にわたるある種の対称性があって壮大なキャンセルが起こるようになっていなければならない．あるいは重力に作用するエネルギーと量子場の真空としてのエネルギーが違っているのであろう．いずれにせよ宇宙項の問題は量子重力への重要な試金石である．

近年，ブレーン・モデルを加味した振動宇宙のモデルが提案されている．観測された宇宙に合わせて真空ポテンシャル $V(\phi)$ を仕立てるオーダー・メイドである．

9. 宇宙項の天文学的観測

一方，天文学の観測で宇宙項の大きさを決める試みがなされている．近年の観測では

$$\Lambda \sim \frac{1}{H^2}$$

のオーダーの宇宙項が存在しているとされている．しかし，観測の精度から言ってさらにいろいろなチェックがなされなければならないであろう．この「観測」とはハッブル係数，密度，曲率などの膨張の式に登場する各項の観測値を方程式に代入したときに，誤差以上の範囲で合わないことを確認することである．このような観測は誤差を持つ観測値の引き算をしなければならない．必然的に難しい「観測」である．筆者はまだ確定的でないと思っている．

天文学的な情報で役立つのはできるだけ過去の天体を見ることである．宇宙の過去にいくと物質のエネルギー密度が大きくなるから時間的に一定の宇宙項の効果を必ず上回ってくる．だから宇宙項の情報を得るには天体が現れた以後のような「近年」を見なければならない．遠方で見える天体は異常に明るいものである．また標準光源として利用できるためには絶対光度が既知でなければならない．その条件を満たすものとして近年登場したのが超新星爆発の光度曲線である．爆発後まだ数日の超新星を見つけてくる早業は掃天の情報技術の進歩がもたらした成果である．その結果が従来の他の「天体」を利用した距離測定と少し違う結果を出して，宇宙項の必要性が言われ出した．相互チェックがまず必要だろう．

筆者が宇宙項の観測的発見に懐疑的なのは技術上の難しさ（これについては筆者は素人）もあるが「そんなバカな」という心情のほうが強い．それは膨張宇宙の現在の時点をどう特徴づけるのかという意識と関連している．宇宙膨張で，物質密度が下がるので，じわじわと宇宙項が姿を見せてくる．だからどこかでエネルギー密度の主役が交代する．観測が事実ならその時期がちょうどいま（「いま」と言っても 10^9年 ぐらいの分解能で）だということである．

それは偶然にも程がある．筆者にとっての「現在」とは「星の時代」の長さである．星の輝く時間，それは核燃焼時間，トンネル効果の時間，電磁気と強い力の関係，などの物理から出せる．その時間の長さと宇宙項の大きさに何らかの特殊な関係があるのか？「そんなバカな」と思う反面，この「特殊な関係」に興味がいってしまうのである．

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

ダークエネルギー問題

千葉 剛

1. ダークエネルギーの証拠[1)]

膨張宇宙を記述するアインシュタイン方程式は以下の２つの式である*1).

$$H^2=\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}(\rho_M+\rho_X)-\frac{K}{a^2}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho_M+\rho_X+3p_X). \quad (2)$$

ここで，$a(t)$ は時間 t における宇宙の大きさを表すスケール因子，H は宇宙の膨張率を表すハッブルパラメター，K は空間の曲率を表すパラメター，G はニュートンの重力定数，ρ_M は（非相対論的）物質のエネルギー密度，ρ_X, p_X はダークエネルギーのエネルギー密度，圧力を表している（相対論的物質のエネルギー密度は無視できるので今は省略した）. (1) 式は宇宙の膨張速度はエネルギー密度で決まること，(2) 式は宇宙膨張の加速度は $-$(密度) $-$ 3(圧力) に比例することを示している．非相対論的物質では圧力は無視できるほど小さく，宇宙は減速膨張するだけである．これは重力は引力であることの表れである．

さて，(1) 式を H^2 で割り無次元化したパラメター（密度パラメター）を導入してみる：$\Omega_{M(X)}=8\pi G\rho_{M(X)}/3H^2$. 空間曲率についての「密度パラメター」は $\Omega_K=-K/a^2H^2$ と定義することにする．このとき，(1) 式は

$$1=\Omega_M+\Omega_X+\Omega_K \quad (3)$$

となり，アインシュタイン方程式の意味することは「すべての密度パラメターの総和は１にならなければならない」となる．$\Omega_X>0$ ならダークエネルギーが存在することを意味する．密度パラメターを決める宇宙論的観測は大きく分けて３つある．1) 銀河・銀河団での質量分布，2) 宇宙背景輻射の揺らぎのスペクトル，3) 遠方の超新星の明るさの観測[5)]である．1) は主に物質の密度 Ω_M を，2) は揺らぎの角度スペクトラムから宇宙の空間曲率 Ω_K を，3) は遠いところでのハッブルパラメターを観測することによる宇宙膨張の加速度を決めるものである．このうち，1) はかなり以前から $\Omega_M<1$ を示唆していた[2)]．最近の観測結果はいずれも低密度で[3)]平坦な宇宙[4)]（$\Omega_M<1, \Omega_K=0$）を示唆している．さらに超新星や宇宙背景輻射の観測は，宇宙は加速膨張（$\ddot{a}>0$）していることを示唆している[4,5)].

つまり問題は次のように要約されよう：

$$\Omega_M\equiv\frac{8\pi G\rho_M}{3H^2}=1$$

であるはずなのに観測は

$$\Omega_M<1$$

を示唆している．

上の「であるはず」という要請は「アインシュタイン方程式（フリードマン方程式）を満たしな

*1) 以下光速 $c=1$，プランク定数 $\hbar=1$ とする単位系を使う．

さい」というところからくる．Ω_M はアインシュタイン方程式の右辺（物質項）と左辺（重力項）の比とも見れるから，この等式を満たすようにするには，1) 新たな物質を導入するか，2) 重力を変えるか，しかないのである．このうち後者の可能性は，太陽系での光の屈折角，時間の遅れや，月の運動等の測定から，一般相対論からのずれは 0.1% 以下であることがわかっているので[6]，困難である*2)．したがって，前者の方向で何か候補者を立てなくてはいけない．すぐに思いつくのがアインシュタインの宇宙項であろう．ただしここでは宇宙「定数」であるという必然性は何もないし，この自由度を（スカラー）場で書き表せば時間変化する可能性もある．最近では，このような以前には宇宙項と言われていたエネルギー成分をダークエネルギーと呼ぶようになってきている．その定義はこの段階では，「(3) 式を満たすようなエネルギー成分」である．エネルギー保存の式，

$$\dot{\rho}_X + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_X + p_X) = 0 \tag{4}$$

から一般には時間変化する (宇宙「定数」は $p = -\rho$ に相当)．

さらに，「宇宙が現在加速膨張している」という観測結果を説明する必要がある．宇宙膨張の加速度はアインシュタイン方程式 (2) 式から $-(\rho_X + 3p_X)$ に比例するからダークエネルギーは「負の圧力」を持たなければならない．また，「現在の宇宙の構造ができるためには宇宙には物質優勢期がなくてはならない」という要請からも負の圧力の必要性が導かれる．過去に遡ればダークエネルギーは物質より少なくなる必要がある．(4) 式から $\rho_X \propto a^{-3(1+w)}$ ($w \equiv p_X/\rho_X$) だから，このことはすなわち，ダークエネルギーは「負の圧力」($w < 0$) を持たなければならない，ということを意味する．

まとめると，ダークエネルギーとは

- (3) 式を満たすような（正の）エネルギー

であり，かつ

- 負の圧力を持ったもの

ということになる．

2. ダークエネルギー問題

真空はローレンツ対称性を持つので，そのエネルギーモーメンタムテンソル $T^{\Lambda}_{\mu\nu}$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に比例して

$$T^{\Lambda}_{\mu\nu} = -\rho^{\Lambda} g_{\mu\nu} \tag{5}$$

と書かれるはずである（ここで負の符号はエネルギー密度を正にするために導入した）．一方，宇宙項入りのアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{6}$$

と書かれる．アインシュタインの宇宙項（宇宙定数）を右辺に移項すればまさしく，宇宙項は真空のエネルギーと見なせることがわかる[7]．

ダークエネルギーの可能性には次に述べるいくつかの深刻な理論的困難がある．

- **宇宙項問題**[8]

場の量子論によると，真空は空っぽではなく，ゼロ点振動のエネルギーを持っている．質量 m の場に対してゼロ点振動のエネルギー密度 $\rho_{\rm vac}$ は，波数のカットオフを $k_{\rm cut}$ として

$$\rho_{\rm vac} = \int_0^{k_{\rm cut}} \frac{1}{2}\sqrt{k^2+m^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \simeq \frac{k_{\rm cut}^4}{16\pi^2}$$

と書かれる．時空の量子的性質が重要になるプランクスケール（10^{19} GeV）をカットオフスケールとして素朴に計算すると，真空のエネルギー密度は観測値（$10^{-29}{\rm g/cm^3} = 10^{-47}\,{\rm GeV^4}$）を 120 桁以上も上回ることになる．真空からの励起だけを問題にする通常の場の理論では，真空からの差額のエネルギーだけを問題にすればよいが，一般相対論においては（作用において）メトリックはエネルギーモーメンタムテンソルとユニヴァーサル

*2) ただし，この主張には留保が必要である．詳しくは最後に触れる．

に結合しているので絶対値自体が問題になる．なぜ真空はほとんど重力相互作用しないように見えるのか，という問題．

- **小ささの問題**
  上の真空の量子効果を解決した上で，さらに最近の観測で示唆されているゼロでない正符号の小さな（$10^{-29}\mathrm{g/cm^3} = 10^{-47}\,\mathrm{GeV^4}$）エネルギー密度のダークエネルギーの実体を解明するということ．
- **相互作用問題**
  ダークエネルギーの自由度を場で表すと，その場は（対称性で禁止されない限り）一般には通常の物質と相互作用しうる．しかしながら，場は時間的に変動し，また非常に軽い（典型的には $\simeq H_0 \simeq 10^{-42}\,\mathrm{GeV}$）ので，自然定数の時間変化や（弱い）等価原理を破る長距離力を媒介しうる．これらの可能性は観測から非常に厳しく制限されている[9)*3)]．

はじめの宇宙項問題がいかに難しい問題であるかは Witten が Dark Matter 2000 という国際会議における講演で次のように述べている．彼の講演から引用しよう：「宇宙項問題は低エネルギーの物理と関係していると思われる．しかしながら，標準模型の成功のゆえに，低エネルギーの物理に変更を加えるのは非常に難しい…」．

3. ダークエネルギーの候補

宇宙項問題についてはいろいろ解決の試みがなされているが，重力と量子に関わる問題であり，最終的な解決には量子重力理論の完成を待たなければならない問題と思われる．宇宙項問題が何らかの形で解決したとして，現在の宇宙の加速膨張を説明する試みとしては，大きく分けて，1) 正の宇宙定数を導入し宇宙は現在ドジッター膨張期に入ったとするか，2) 真空のエネルギーはゼロだが現在はまだ真空に落ち着く過渡期にある，とするかの 2 通りに分けられる．

真空のエネルギーモーメンタムテンソル（(5) 式）を完全流体のエネルギーモーメンタムテンソル（u_μ は流体の 4 元速度）

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu})$$

と比較すればわかるように真空の圧力 p^Λ は $p^\Lambda = -\rho^\Lambda$ である．一方，ポテンシャル $V(\phi)$ を持ったスカラー場では，エネルギー密度は $\dot{\phi}^2/2+V(\phi)$，圧力は $\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)$ と書けるからスカラー場がゆっくりと運動すれば運動項がポテンシャル項に比べて無視できて「負の圧力」になり，インフレーションと同様に宇宙の加速膨張が実現できる．また，真空の相転移により生じたコズミックストリングの場合には紐の張力という次元を持った量が存在するから共動座標系で見てエネルギー密度一定とするとコズミックストリングのエネルギー密度は a^{-2} に比例して減少する．(4) 式からこのことはコズミックストリングは $p_X = -\rho_X/3$ であることを意味する．

何れの試みでも現在のダークエネルギーの小ささを説明するものでなくてはいけない．現在までのところ様々なモデルが提案されている．「小さ さ」を説明するために小さいパラメターを導入するか，初期条件を微調整するかが必要であるが，その起源を素粒子理論の枠内で矛盾のないように説明しうるモデルは今のところ，a) ストリングランドスケープにおける数（$\sim 10^{500}$ 個！）ある（準）真空（＝宇宙定数）のうちの一つが我々の宇宙であるとするもの[12)]，b) ストリング理論に現れるアキシオンと呼ばれる CP 対称性を破るシフト対称性を持つスカラー場を用いるもの[13)]，が考えられる．ここで，ダークエネルギーをその状態方程式 $w = p_X/\rho_X$ にしたがって分類してみる．

- **$-1 < w < 0$ (decaying Λ)**
  緩やかなポテンシャルを持つスカラー場（ク

*3) しかしながら，遠方のクェーサーからの光の吸収線の観測により微細構造定数が過去には小さかった可能性が指摘されている[10)]．もしこれが本当なら，このような時間変化を引き起こす場を考える必要が出てくる．この場に伴う等価原理の破れの効果は将来の実験で検証可能なはずである[11)]．

インテッセンス).

位相欠陥のネットワーク（コズミックストリング ($w=-1/3$), ドメインウォール ($w=-2/3$)).

- $\boldsymbol{w=-1}$

  宇宙定数.

- $\boldsymbol{w<-1}$ **(growing Λ)**

  重力と non-minimal に結合したスカラー場（拡張されたクインテッセンス).

  正準的でない運動項を持ったスカラー場.

a) は $w=-1$ の場合に対応し，b) のアキシオンは $-1<w<0$ の場合に相当する．小さい数や微調整の問題は，1) では真空の選択の問題に置き換わり，2) ではインスタントン効果によって自然に小さい係数が現れる仕組みになっている．ただし，ここでは初期条件の微調整の問題は残っている．

4. 宇宙論とダークエネルギー

次に，観測的にダークエネルギーの正体が暴き出せるのか，その可能性を探ってみよう．戦略としては，1) まず，ダークエネルギーが定数か否かを明らかにし，2) その上で，ダークエネルギーの時間依存性（可能ならラグランジアンまで）を決定する．

4.1 宇宙定数か否か

我々の宇宙が落ち着くはずの最大対称空間（「真の真空」）が，ドジッター時空（正の宇宙項）なのかそれともミンコフスキー時空（宇宙項なし）なのか（さらには反ドジッター時空の可能性もある[14]）．理論で縛れないのなら，観測からダークエネルギーの状態方程式 $w=p_X/\rho_X$ が $w=-1$ かそうでないかを決定することが重要である．

宇宙論においては様々な距離の定義があり，用途により使い分けられる．天体の絶対光度と観測される輻射強度から決まる光度距離 d_L というものがある．超新星で決められる距離はまさにこの距離である．また，天体の広がりを見込む角と天体の広がりから決まる角径距離 d_A というものもよく使われる．光の屈折角が観測量である重力レンズや 2 次元天球面上の角度パワースペクトルが観測量である宇宙背景輻射で使われる．

第一段階のテーマで観測量としてあがってくるのは以下のものであろう．すべて何らかの方法で，時間の関数としてのハッブルパラメター（ハッブル関数), $H(z)^2/H_0^2=\Omega_M(1+z)^3+\Omega_X(1+z)^{3(1+w)}$, を測定するものである．ここで赤方偏移 z はスケール因子 a と $1+z=1/a$ と関係づいている（現在のスケール因子を 1 に規格化した).

- **Ia 型超新星の magnitude-redshift relation:**

$$d_L(z)=(1+z)r(z),\quad r(z)=\int_0^z\frac{dz}{H(z)}.$$

- **重力レンズ：**

$$d_A(z)=\frac{d_L(z)}{(1+z)^2}.$$

- **宇宙背景輻射の揺らぎのピークの位置 θ_n（宇宙の晴れ上がりのときの赤方偏移 z_{LSS}, 光子バリオン流体の音速 c_s)：**

$$\theta_n\simeq\left(\frac{\eta_{LSS}}{n}\right)(1+z_{LSS})^{-1}d_A(z_{LSS})^{-1},$$
$$\eta_{LSS}=\int_{z_{LSS}}^{\infty}\frac{c_s(z)dz}{H(z)}.$$

- **銀河の number count（銀河数 N, 数密度 n)：**

$$dN/d\Omega dz=n(z)dV/d\Omega dz$$
$$=\frac{n(z)r(z)^2}{(1+z)^3H(z)}.$$

それぞれについて，様々の現在進行中（SCP, HZT, CLASS, WMAP, Planck, 2dF, SDSS）あるいは将来（SNAP, CMBPol, LSST）の観測計画があり，今後 10 年以内にダークエネルギーに関係した宇宙論パラメターに精度のよい情報をもたらしてくれるものと期待される．もちろん，そのためには各々の観測における系統誤差（銀河間の塵の影響，銀河におけるダークマターの分布，銀河の進化効果）の理解が不可欠である．

4.2 $w(z)$

ダークエネルギーが時間変化する（$w = -1$）可能性が出てきたら，次にすべきは状態方程式の時間依存性 $w(z)$ である．この中にダイナミクスの違いを反映したモデルの詳細を決定する情報が含まれているはずである．

ここでは，特に $-1 < w < 0$ の可能性が出てきた場合の第二段階のテーマを考える．それは，「観測データからラグランジアン（この場合はポテンシャル）を直接に決定しよう」，というものである．これは原理的には可能であり[15]，実際上も遂行可能である[16]．

「原理的には」の部分のアイデアは全く簡単で，方程式を観測量を変数にとって書き直せばよい．つまり，平坦な宇宙での以下の 2 つの式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_M + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right),$$
$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_M + \dot{\phi}^2)$$

を観測量（超新星までの光度距離），$d_L(z)/(1+z) = r(z) = \int_0^z dz/H(z)$，を使って書き直せばよい．結果は，

$$\begin{aligned} 8\pi G V(z) &= \frac{3}{r'^2} + (1+z)\frac{r''}{r'^3} \\ &\quad -3H_0^2 \Omega_M \frac{(1+z)^3}{2}, \\ 8\pi G(1+z)^2 \frac{\phi'^2}{r'^2} &= -2(1+z)\frac{r''}{r'^3} \\ &\quad -3H_0^2 \Omega_M (1+z)^3 \end{aligned}$$

となる．ここで $r' = dr/dz$．したがって，赤方偏移 z を媒介変数としてポテンシャルとスカラー場に関係がついた：$V(z) = V(\phi(z))$．

計画されている超新星観測衛星（SNAP（Supernova/Acceleration Probe））*4）では年間 2000 個の赤方偏移が 2 くらいまでの超新星を 3 年にわたって観測する予定である（現在の観測数は 400 個程度）．観測データの飛躍的な増大によりダークエネルギーの証拠をより強固なものにしてくれるであろう．また，観測データからダークエネルギーの正体への手掛りが得られると期待される．

また，ダークエネルギーが時間変化するならそれに付随した（空間的な）ゆらぎもあるはずであり，その効果（揺らぎの値やダークエネルギーの音速[17]）を観測できればダークエネルギーの時間変化することの相補的な証拠となる．

5. ガモフの飛躍

以上，ダークエネルギーをめぐる現状に簡単にふれた．まとめると，

- **現在の観測結果を満たすには，1) 新たな物質を導入するか，2) 重力を変えるか，しかなく，後者の可能性は薄い．**
- **しかしながら，前者の可能性（ダークエネルギー）には問題が山積みである．**
- **近い将来，観測からダークエネルギーの性質（特に状態方程式）に制限をつけられ，宇宙定数か否かが明らかになるであろうと期待される．**

ところで，最初のところで，「重力を変更することは難しい」と書いたが，この主張には留保が必要である．そこで言う変更とは正確には局所的な変更のことであり，大域的な変更は想定していない．しかしながら，ガモフのビッグバン理論がなかなか受け入れられなかった理由の一つには現在の宇宙（100 億年）から「最初の 3 分間」への壮大な外挿への心理的抵抗があったからとされている．一方，一般相対論が検証されているスケールは 10^{13} cm である．これをホライズンスケール（$= 10^{28}$ cm）まで外挿するのに抵抗を感じないであろうか．そこで最近になって大域的に重力を変更しようという試みもなされてきている[18]．真空が重力を「感じないように」大域的に重力を変更するのである．ダークエネルギーの導入が，新粒子を導入しそれを実験で確かめるという「湯川・ローレンス型」のアプローチとすれば，この試みは原理から演繹される存在にのみ着目する「アインシュタイン・ディラック型」と言えなくもない[19]．

*4） http://snap.lbl.gov

新物質を導入するのか，それとも重力を変更するのか，我々は，今その岐路に立たされているのかもしれない．

参考文献

1) 千葉　剛，『宇宙を支配する暗黒のエネルギー』(岩波科学ライブラリー 91，岩波書店（2003 年））.
2) P.J.E. Peebles, *Nature* **321** (1986) 27.
3) J.A. Peacock et al., *Nature* **410** (2001) 169; L. Verde et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **335** (2002) 432.
4) D.N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175; E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 330.
5) A.G. Riess *et al.*, *AJ* **116** (1998) 1009; S. Perlmutter *et al.*, *ApJ* **517** (1999) 565; M. Kowalski *et al.*, *Astrophys. J.* **686** (2008) 749.
6) C.M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, (Rev. Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
7) Ya.B. Zel'dovich, *JETP* **6** (1967) 316.
8) S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1.
9) T. Chiba, gr-qc/0110118; J.P. Uzan, hep-ph/0205340.
10) J.K. Webb et al., *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 091301.
11) T. Chiba and K. Kohri, *Prog. Theor. Phys.* **107** (2002) 631.
12) R. Bousso and J. Polchinski, *JHEP* **0006** (2000) 006; L. Susskind, arXiv:hep-th/0302219.
13) J.E. Kim and H.P. Nilles, *Phys. Lett.* **B 553** (2003) 1.
14) R. Kallosh and A. Linde, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 023510.
15) A. Starobinsky, *JETP Lett.* **68** (1998) 757; T. Nakamura and T. Chiba, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **306** (1999) 696.
16) T. Chiba and T. Nakamura, *Phys. Rev.* **D 62** (2000) 121301.
17) T. Chiba, N. Sugiyama, and T. Nakamura, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **301** (1998) 72; J.K. Erickson et al., *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 121301.
18) G.R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett.* **B 485** (2000) 208; C. de Rham *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 251603.
19) 佐藤文隆『物理学の世紀』(集英社新書，2000).

（ちば・たけし，日本大学文理学部）

宇宙の暗黒成分と量子重力

向山 信治

1. 宇宙の暗黒成分は本当に必要か？

現在の宇宙は，その9割以上が私たちの知らないエネルギーと物質で満ちていると言う．実際，超新星や宇宙背景輻射の観測は宇宙の加速膨張，そして負の圧力を持ったエネルギーの存在を強く示唆している．また，銀河が回転によってばらばらになってしまわないためには，見えない物質が必要と考えられている．これらのエネルギーと物質は，それぞれ暗黒エネルギー，暗黒物質と呼ばれているが，正体は分かっていない．基本的に分かっているのは，それらの重力源としての振舞いと，電磁波では観測されないということだけである．呼び名に“暗黒”という言葉が含まれているのは，もちろん後者の性質による．

これらの謎を，物理学者や天文学者が放っておくはずがない．なにしろ，宇宙全体の9割以上を占める謎である．世界各地で，暗黒エネルギーと暗黒物質探査の実験・観測が実際に行われ，新しい計画も多数提案されている．また，理論物理学者や理論天文学者は，暗黒エネルギーと暗黒物質の候補を擁立し，予想される性質を理論的に詳しく調べている．だから，宇宙の暗黒成分の正体は未だ全く分からないにも関わらず，候補には事欠かないのだ．

ところで，物理学の歴史を振り返ってみると，これに非常に似た状況があったのに気づく．19世紀，惑星の軌道の精密な観測により，水星が奇妙な動きをしていることが発見された．これは近日点移動と呼ばれる現象で，ニュートンの万有引力の法則と運動方程式を駆使して計算をしても，どうしても説明できなかった．そこで，人びとは見えない惑星，言わば“暗黒惑星”を導入して，この現象を説明しようとした．水星の内側に軌道を持つとされた，この暗黒惑星はヴァルカンと呼ばれ，何と，発見したと主張した人もいたそうである．しかし，ご存じのように，本当の答えは暗黒惑星などではなく，“重力理論を変える”ということであった．つまり，“ニュートン力学から一般相対性理論へ”新しい重力理論の幕開けである．アインシュタインの一般相対性理論は惑星の近日点移動を見事に説明し，ニュートン力学に変わる，新しい重力理論としての地位を獲得したのであった．

この歴史的事実を鑑みれば，少なからぬ研究者が「暗黒エネルギーと暗黒物質を導入する代わりに，一般相対性理論を変更することはできないか？」と考えるのも理解できる．暗黒エネルギーと暗黒物質は，アインシュタインの一般相対性理論を用いて観測結果を説明しようとすると絶対に必要だが，もしも一般相対性理論が変更を受けるのなら，もしかすると必要ないのかもしれない．宇宙の暗黒成分を示唆するのは宇宙全体あるいは銀河といったスケールでの現象だが，これだけの大スケールでの重力の性質が，今まで実験や観測で直接決定されたことはない．一方，例えば太陽系のスケー

ルでは，惑星の軌道の精密な測定等により，一般相対性理論が高い精度で検証されている．したがって，暗黒成分を必要としない重力理論の候補としては，一般相対性理論からのずれが長距離でのみ顕著になるようなものが望ましい．また，銀河や宇宙の年齢は長いから，長時間経って初めてずれが生じるようなものも許されるだろう．

2. 1000 km で量子重力？

重力を長距離または長時間で変更というと簡単に聞こえるかもしれないが，決してそうではない．そもそも，そんなことが理論的に可能なのかさえ非自明であって，宇宙の加速膨張や銀河の回転を説明できるか否かを問う以前の問題である．

通常，低エネルギー有効理論の作用には，考え得るすべての項が含まれる．仮にある項の係数を最初に零としても，対称性で禁止されない限り，量子補正によって必ず現れるからだ．それでも予言性を保ち得るのは，あるエネルギースケール Λ が存在して，それに比べて系を特徴づけるエネルギースケール E を十分小さくしたとき，有限個の項を除いて E/Λ の正の冪で小さくなっていくからである．これらは無限に存在しているのだが，Λ に比べて十分低エネルギーでは決して重要にならない．従って，低エネルギーでは残った有限の項だけで系を記述でき，それらの項の係数を有限回の実験や観測で（ある精度の範囲で）決めることによって予言ができるようになる．逆に，E が Λ より大きくなると，冪指数が大きければ大きいほどその寄与が重要になり，系を記述するのに無限個の項が必要になってしまう．この場合，それらの係数すべてを有限回の実験や観測で決めることができないので，予言性が完全に失われる．つまり，Λ より高エネルギーでは低エネルギー有効理論が破綻し，別の記述が必要になる．この Λ は，UV（紫外）スケールと呼ばれ，重力理論の場合には，量子重力が本質的になるスケールに対応する．例えば，一般相対性理論の UV スケールはコンプトン波長と重力半径が一致するスケールと考えられており，プランクスケールと呼ばれている．プランクスケールは，エネルギーで言うと 10^{19} GeV という超高エネルギー，長さで言うと 10^{-33} cm という超短距離なので，現在あるいは近い将来私たちが実験・観測可能な領域すべてで，一般相対性理論が予言力を持つ．

一般相対性理論を長距離または長時間でのみ変更する試みとして，massive 重力理論[1]や DGP ブレーンモデル[2]がある．これらのモデルでは，UV スケール（前段落の Λ）が非常に低いことが知られている[3,4]．具体的には，重力が変更を受ける距離スケールを r_c とすると，$\Lambda \sim (M_{\rm Pl}/r_c^2)^{1/3}$ で与えられる．これらの理論には，通常の重力子の 2 自由度に，スカラーの自由度が 1 つ加わる．この新しい自由度を記述する有効理論が，スケール Λ で破綻するのだ．例えば r_c を現在の宇宙の地平線スケールにすると，$1/\Lambda \sim 1000$ km よりも短距離では低エネルギー有効理論が適用範囲を超えてしまう．これは，後述するヒッグス機構を使わずにゲージ場に質量を与えた場合に似ているが，さらに性質が悪い．ゲージ場の場合は，ゲージ結合定数を零にすることで，新しい自由度と通常の物質場との相互作用を断ち切ることができるが，これらのモデルでは，物質場との相互作用の強さが常にニュートン定数で決まっており，断ち切ることができない．従って，どうパラメータを選んでも，既知の重力現象を有効理論の枠内で説明することができない．つまり，1000 km における重力現象を説明するのに，量子重力が必要になるということである．

では，長距離で一般相対性理論を変更するような，量子重力理論はあるのだろうか？ もしあれば，上述の巨視的 UV スケールの問題に，一石を投じられるのではなかろうか．最近分かってきた[5]のだが，Hořava によって提唱された重力理論[6]が，そのような部類に入る可能性がある．ただ，Hořava の理論は今年になって出てきたばかりで，まだまだ解明すべき点が多い．本稿では，Hořava の理論についてのこれ以上の記述は控えることにし，巨

視的スケールで量子重力を必要としないような可能性を探ることにしよう．

3. 自発的対称性の破れとゴースト凝縮

困難に直面したときには，周辺分野に似た状況がないか問うてみるのが有益なことがある．そこで，素粒子標準模型の根底を支える，ゲージ理論について考察してみよう．時空の座標変換をゲージ変換とみなせば，一般相対性理論も一種のゲージ理論と考えることができるから，何らかのヒントが得られるかも知れない．

ゲージ理論の利点の一つとして，許される相互作用の形がユニバーサルに決定され，結果として理論が強力な予言力を持つ，という性質がある．例えば，光子の質量は禁止され，零であることが量子論レベルで保証される．つまり，電磁場が一定速度（光速）で伝播することが，ゲージ対称性によって保証されているのだ．また，質量が零の場によって媒介される力は一般にガウス則（力 $\propto$ 距離の逆自乗）に従うので，電場がガウス則に従うことも分かる．

しかし，ゲージ理論を適用すべき自然界には，光子が媒介する電磁気力だけでなく，計4つの力が存在する．ここでは，原子核のベータ崩壊等の原因となる，弱い力について考えてみよう．弱い力は電磁気力よりもはるかに弱く，非常に短い距離の間でのみ働く．つまり，力 $\propto$ 距離の逆自乗ではない．一方，上述のように，（単純に）ゲージ対称性を課すと，力を媒介するベクトル場（ゲージ場）の質量が零であること，そして力がガウス則に従うことが導かれる．だから，一見，ゲージ理論は弱い力を記述するのに不向きではないかと思えるかもしれない．

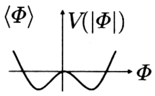
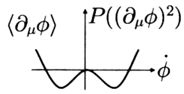
このジレンマを見事に解決するのが，ヒッグス機構である．ヒッグス場と呼ばれる場が宇宙を満たす（凝縮する）と，ゲージ対称性の少なくとも一部が自発的に破れ，ゲージ場が質量を持つことが許される．重要なことは，対称性の破れのパターンによって，低エネルギー有効理論の構造が決まるということである．つまり，相互作用がユニバーサルに決まるという，ゲージ理論の利点はそのまま維持されることになる．ワインバーグとサラムが，電磁気力と弱い力を統一して大成功を収めたのも，このヒッグス機構のおかげである．

こうして考えてみると，ヒッグス機構のような，自発的対称性の破れのアイデアを重力場に適用すれば，直面する困難を解決できるかもしれないという予想に至る．実際，一般相対性理論では重力場の質量は零で，重力は遠方でガウス則に従う．私たちは，どうやって重力場に質量（のようなもの）を与え，ガウス則を変更するのかに四苦八苦しているのだ．この問題を回避するには，理論そのものを大きく変更するのではなく，ヒッグス機構と同様，状態だけを通常から変更することができれば済むのかもしれない．対称性の自発的破れを使えば，ヒッグス機構と同様に，低エネルギー有効理論の構造を，対称性の破れのパターンだけで決定できるだろう．

では，具体的にはどうしたら，自発的対称性の破れのアイデアを重力に適用できるだろうか．一般相対性理論で本質的な対称性は，一般座標変換に対する不変性である．だから，一般相対性理論から導かれる重力を変更するには，この対称性を破る必要がある．ただし，私たちの住む宇宙は大スケールでは空間的に一様等方なので，空間方向の対称性は破らないほうが無難だ．そこで，時間座標の変換に対する不変性を破ることを考える．実際の宇宙は膨張しており，時間方向の対称性は破れているとも言える．ただし，ここでは，背景時空が完全に平坦であっても時間方向の対称性が破れているような状態を考える．さもなければ，通常考えられている宇宙の状態と何ら違いがなくなってしまう．

ヒッグス機構では，対称性を自発的に破るため，対称性の変換で不変でない真空期待値を場に持たせる．今回は，時間座標の変換に対して不変でない期待値を場に持たせる必要がある．最も単純には，スカラー場（以後 ϕ）の期待値に一定の時間

表 1 通常のヒッグス機構とゴースト凝縮の比較．左側の V' と V'' はポテンシャル V を Φ で微分したもの，右側の P' と P'' は運動項 P を $(\partial\phi)^2$ で微分したものである．

	ヒッグス機構	ゴースト凝縮
オーダーパラメータ		
不安定性	タキオン $-\mu^2\Phi^2$	ゴースト $-\dot{\phi}^2$
凝縮点	$V'=0, V''>0$	$P'=0, P''>0$
自発的に破る対称性	ゲージ対称性	時間座標の変換に対する不変性
変更する力	ゲージ場による力	重力
力の法則	湯川型	ガウス型＋振動型

微分 $\langle\dot{\phi}\rangle$ を持たせれば良さそうである（表 1）．これを，後述する理由により，ゴースト凝縮と呼ぼう[7]．ゴースト凝縮を実現するには，ポテンシャルは平らでなければならない．なぜなら，ϕ を一定速度で時間変化させると，ポテンシャルが平らでなければエネルギー密度が時間発展してしまい，平坦な時空が解として許されないからだ．運動項 P は，表 1 右上のような形を考える．原点近くで運動項が減少することから，$\dot{\phi}=0$ は不安定であることが分かる．これは，ゴーストと呼ばれる，負の運動エネルギーを持つ摂動モードに起因する不安定性である．ゴーストがあると，エネルギーを保存しながら（正エネルギーの）通常の粒子と（負エネルギーの）ゴーストを対生成できるので，真空が不安定になってしまう．また，確率が負の状態が現れるという量子論上の問題も生じる．だから，ゴーストを含む背景においては，まともな有効場の理論を構成することができない．一方，P の谷の底では，有効理論を何の問題もなく構成できる．これは，ゴーストが凝縮して，系を安定化させたと考えることができる．ゴースト凝縮と呼ぶことにしたのは，このような解釈による．凝縮点では $\langle\dot{\phi}\rangle\neq 0$ なので，時間座標の変換に対する不変性が自発的に破れ，結果として重力が変更を受けることになる．

ゴースト凝縮では，ガウス（ニュートン）型の重力に，長い時間かけて振動が加えられる．対称性の破れのスケールを M とすると，空間的振動のスケールは $r_0 \sim M_{\rm Pl}/M^2$，時間発展のスケールは $t_0 \sim M_{\rm Pl}^2/M^3$ である．例えば，$M\sim 10\,\mathrm{MeV}$ とすると，r_0 は 1000 km 程度，t_0 は現在の宇宙年齢程度となる．だから，長時間での変更と呼ぶのが適切かもしれない．M を小さくすると t_c が長くなるので，決まった時間内に生じる変更の度合いは小さくなる．より詳細には非線形の効果を考慮する必要があり，ここでは説明を割愛するが，M が 100 GeV よりも十分小さければ実験や観測と矛盾しないことを示せる[8]．さらに，もしも M が丁度 100 GeV 程度なら，将来の観測可能性についての興味深い予言ができる．

4. 宇宙論への応用

せっかく自発的対称性の破れを重力に適用することができたのだから，これが宇宙の暗黒成分の代わりになり得るのかを考えてみよう．まずは，ゴースト凝縮，つまり表 1 と図 1 の P のグラフの谷の底が，系のアトラクターになっていることを示そう．ラグランジアン $P((\partial\phi)^2)$ で記述されるスカラー場 ϕ を，膨張している一様等方宇宙で考えることにする．すると，運動方程式は，$\partial_t\left(a^3P'\dot{\phi}\right)=0$ となる．ここで a は宇宙のスケール因子，大雑把に言えば宇宙のサイズを表す

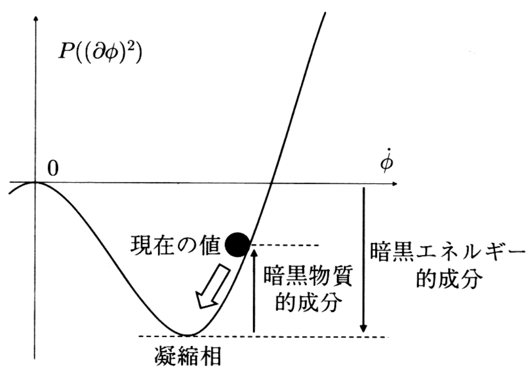


図 1 暗黒エネルギー的成分と暗黒物質的成分．

時間の関数である．従って，

$$P'\dot{\phi} \propto a^{-3} \to 0 \quad (a \to \infty) \tag{1}$$

となり，宇宙がどんどん膨張することで，$\dot{\phi} \to 0$ あるいは $P' \to 0$ のどちらかが実現する．前者の周りにはゴーストがあるので，私たちはそこには住めない．そこでは系が不安定になるので，結局のところ $\dot{\phi} = 0$ に近づくことはあり得ないのだ．結果として，$P' = 0$ が実現するしかなくなる．つまり，宇宙膨張によって，系は自然と $P' = 0$ に近づく（図 1 で白抜き矢印の方向に発展する）ということだ．

実は，$P' = 0$ に向かって凝縮する様子は，一様等方な宇宙膨張の観点からすると暗黒エネルギーと暗黒物質のように見える（図 1 参照）．まず，対称性の回復する状態 $\dot{\phi} = 0$（図 1 の P のグラフで丘の上）で真空のエネルギーが零だったとすると，対称性の破れた凝縮相（P のグラフで谷の底）では暗黒エネルギーのように振る舞う成分が得られる．これは，ラグランジアン P から得られるエネルギー運動量テンソルが

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + P'\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \tag{2}$$

となることからわかる．実際，凝縮相では $P' = 0$ なので $T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu}$ となり，これは $P < 0$ ならば正の真空エネルギー $|P|$ に対応する．そして，これが暗黒エネルギーのように振る舞うのだ．この状況は，通常のヒッグス機構とは対照的である．実際，通常のヒッグス機構では，対称性の回復する状態で真空のエネルギーが零だったとすると，凝縮相では必ず負の真空エネルギーが生じて観測と完全に矛盾してしまう．それに対してゴースト凝縮では，(2) の第 1 項から自然と正の真空エネルギーが生じ，暗黒エネルギーのように見えるのだ．では，第 2 項はどんな役割を果たすのだろうか？ 実は，暗黒物質のように振る舞うことが分かる．第 2 項は 00 成分しか持たない，つまり圧力を持たない重力源として働くが，その係数は (1) から凝縮相の近くでは $P' \propto a^{-3}$ と変化することがわかる．これはまさに暗黒物質の満たすべき性質である．つまり，(2) の第 1 項は暗黒エネルギー，第 2 項は暗黒物質のように振る舞うということだ．ただし，ここで述べたことは一様等方な宇宙膨張に限った話である．非一様な線形摂動についても同じことが言えるが，非一様非線形な状況で本当に暗黒エネルギーと暗黒物質のように振る舞うのかは不明である．それでも，(2) が暗黒エネルギーと暗黒物質の代わりになり得る成分を過不足なく含んでいるのは非常に興味深い．

次は，初期宇宙に目を向けよう．生まれて間もない宇宙は，インフレーションによって急激に引き延ばされて熱い火の玉宇宙に転じたと考えられている．インフレーションは，理論として美しいだけでなく，宇宙背景輻射の観測結果を正しく予言するため，標準宇宙論の一大要素として，多くの研究者によって支持されている．しかし，インフレーションを起こす源と言われる真空のエネルギーが何によるものなのかは，実際のところ，未だに分かっていない．ここでは，ゴースト凝縮によってインフレーションを起こすシナリオを考えよう[9]．Cosmic Background Explorer や Wilkinson Microwave Anisotropy Probe で観測されている，ほとんどスケール不変で振幅が 10^{-5} 程度の揺らぎを生成するところまでは，通常のインフレーションと同じだ．しかし，このシナリオは，ガウス分布からのずれを比較的大きく予言する．一般にガウス分布からのずれは非線形の効果によって生じるが，ゴースト凝縮によるインフレーションでは，揺らぎの分散関係が通常と異なるため，非線形性が通常よりも現れやすい．結果として，通常のインフレーションよりも大きなずれが期待できることになる．具体的に計算すると，このずれは，現在までの観測と矛盾するほどは大きくないが，近い将来観測できるレベルとなっている．従って，宇宙背景輻射の観測によりモデルの正否を判別できる可能性が十分あると考えられる．

5. ブラックホール熱力学と量子重力

量子力学の発展の歴史において，水素原子の研究が重要な役割を果たした．量子重力の構築に向けて，同様に重要な役割を果たすのはブラックホールではないだろうか．実際，超弦理論における近年の大きな成果の一つである AdS/CFT 対応は，ブラックホールの研究が発端となっている．

ブラックホールには熱力学と類似の性質が多くあり，それらはブラックホール熱力学と呼ばれている．まず，1975 年にホーキング（S. Hawking）が理論的に示したように，ブラックホールは

$$T_{\mathrm{BH}} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_{\mathrm{B}} c} \tag{3}$$

で与えられる温度の放射をすると考えられている（ホーキング放射）．ここで，κ はブラックホール地平線の表面重力である．また，ブラックホールは，地平線の面積を A とすれば

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{k_{\mathrm{B}} c^3}{4\hbar G_{\mathrm{N}}} A \tag{4}$$

で与えられるエントロピーを持ち，「ブラックホールのエントロピーと物質のエントロピーの和は減少しない」と考えられている．これは“一般化された第二法則”と呼ばれ，一般相対性理論において，少なくとも準静的な過程に対しては成立すると考えられている．興味深いことに，公式 (4) はニュートン定数（G_{N}）とプランク定数（$\hbar$）とボルツマン定数（k_{B}）を含んでおり，ブラックホール熱力学の背後に重力と量子論と統計力学があることを示唆している．

AdS/CFT に代表されるホログラフィック対応は，ある種の背景時空で定義された重力理論と，その時空の境界で定義された場の理論とが同等であると主張する．もしもこれが正しければ，境界における場の量子論を，量子重力の定義と考えることもできよう．この対応では，重力理論におけるブラックホールは，場の理論における熱的励起状態と解釈することができる．したがって，“一般化された第二法則”は，境界における場の理論では通常の熱力学第二法則となり，成立して当然のものとなる．

この論理を逆手に取ると，面白いことに気づく．まず，何らかの重力理論と，その理論におけるブラックホールを含む状態が与えられたとしよう．例えば，ゴースト凝縮におけるブラックホール解は，ブラックホールに落ち込む方向に沿ってスカラー場の微分を与えることで得られる．もしも，この状況がホログラフィック対応を持つとすると，上述の論理により，“一般化された第二法則”が成り立つはずである．逆に，“一般化された第二法則”が成立しないとすると，ホログラフィック対応は存在し得ないと結論できる．つまり，“一般化された第二法則”を思考実験の道しるべとすることで，低エネルギーで有効な重力理論の背後にある，量子重力理論の性質（この場合，ホログラフィック対応の有無）を探ることができるということだ．

では，ゴースト凝縮が“一般化された第二法則”を破る可能性はあるのだろうか？ まず最初に思いつく可能性は，負のエネルギー密度を伴う励起だろう．ゴースト凝縮は，スカラー場の微分が期待値を持ちながら，そのエネルギー密度がゼロの状態である．従って，スカラー場の微分の期待値を少しずらす摂動により，局所的なエネルギー密度を正にも負にもできる．エネルギーが負の励起をブラックホールに送りこめば，ブラックホールの質量が減少，地平線の面積が減少，従ってブラックホールのエントロピーが減少するだろう．始状態と終状態において地平線の外側に何も励起がないとすると，ブラックホールが全エントロピーを担うはずなので，全エントロピーが減少，すなわち“一般化された第二法則”が破れることになる．しかし，実はこの思考実験は不可能である．ゴースト凝縮を担うスカラー場は，3 節で述べたとおり，ポテンシャルを持たない．別の言い方をすると，スカラー場を定数ずらしても作用は不変である．これは理論の持つ対称性なので，対応する保存量が存在する．これをシフト荷と呼ぶことにすると，ゴースト凝縮を担うスカラー場の重力エネ

ルギーは，シフト荷とハミルトニアンの和で与えられる．なお，前者は保存し，後者は非負である．従って，始状態として地平線の外側に何も励起がないとすると，負の重力エネルギーを伴う励起だけを生み出すことは不可能である．負の重力エネルギーを励起させると，シフト荷の保存則から，それと同じか，またはそれを上回る正の重力エネルギーが同時に励起されることになる．従って，正と負の重力エネルギーの両方がブラックホールに落ち込んだ後では，結局，ブラックホールのエントロピーは元の値に戻るか，あるいは増加するはずである．

次に，ゴースト凝縮を担うスカラー場と，それ以外の場の間に直接の相互作用がある場合を考えてみよう．相互作用の形によっては，通常は (3) で与えられるはずのブラックホールの温度が，微妙に変更を受けることがある．変更の受け方はゴースト凝縮との相互作用の形と大きさに依存しており，場によって異なる．従って，1 つのブラックホールであっても，場ごとに違う温度のホーキング放射をすることになる．この温度差を利用して，ブラックホールのエントロピーを減少させる可能性が指摘されている[10]．一方，ブラックホールの周りのゴースト凝縮は，長い時間かけて降着し，ブラックホールのエントロピーを増加させることが分かっている．どちらの効果が大きいかによって，“一般化された第二法則” が破れるかどうかが決まる．結果として，“一般化された第二法則” は，ゴースト凝縮と他の場の相互作用に制限を与えることになる．もしも背後にある量子重力理論がホログラフィック対応を持つのであれば，相互作用の形と大きさは，“一般化された第二法則” が成立するような範囲になっているはずだ．幸いにも，量子効果によって自然に生じる大きさの相互作用を考えた場合，“一般化された第二法則” は成立するようである[11]．

6. さいごに

暗黒エネルギーと暗黒物質の謎は，現代物理学の金字塔の一つである一般相対性理論に，変更を迫っているのかもしれない．こういう立場に立つと，宇宙の暗黒成分という超大スケールの謎と，量子重力という極小スケールの夢とは，どうしても切り離せない関係になる．自発的対称性の破れを使わずに一般相対性理論を変更しようとすると，巨視的なスケールで量子重力が必要になってしまう．量子重力理論がホログラフィック対応を持つと仮定すると，自発的対称性の破れを起こして重力の性質を変える場が，それ以外の場とどう相互作用するかについて，理論的制限が得られる．

宇宙の暗黒成分か重力の変更か？ その答えは，最終的には観測と実験によって得られるべきものである．どちらになるかは現時点でわからないが，宇宙の観測と量子重力がつながるようなことがあれば，どんなにわくわくすることだろう．

参考文献

1) M. Fierz and W. Pauli, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A **173**, 211 (1939).
2) G.R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett.* B **485**, 208 (2000).
3) N. Arkani-Hamed, H. Georgi and M.D. Schwartz, *Annals Phys.* **305**, 96 (2003).
4) M.A. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi, *JHEP* **0309**, 029 (2003).
5) S. Mukohyama, arXiv:0905.3563 [hep-th].
6) P. Hořava, *Phys. Rev.* D **79**, 084008 (2009).
7) N. Arkani-Hamed, H.C. Cheng, M.A. Luty and S. Mukohyama, *JHEP* **0405**, 074 (2004).
8) N. Arkani-Hamed, H.C. Cheng, M.A. Luty, S. Mukohyama and T. Wiseman, *JHEP* **0701**, 036 (2007).
9) N. Arkani-Hamed, P. Creminelli, S. Mukohyama and M. Zaldarriaga, *JCAP* **0404**, 001 (2004).
10) S.L. Dubovsky and S.M. Sibiryakov, *Phys. Lett.* B **638**, 509 (2006).
11) S. Mukohyama, arXiv:0901.3595 [hep-th].

（むこうやま・しんじ，東京大学数物連携宇宙研究機構）

別冊・数理科学『量子重力理論 広がる多彩な最前線』

2009 年 10 月 10 日発行

数 理 科 学 編 集 部 発行人 木 下 敏 孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社** TEL. (03) 5474–8500 (代表)

〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25 振替 00170–7–2387 (03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本 三美印刷株式会社 山岡景仁